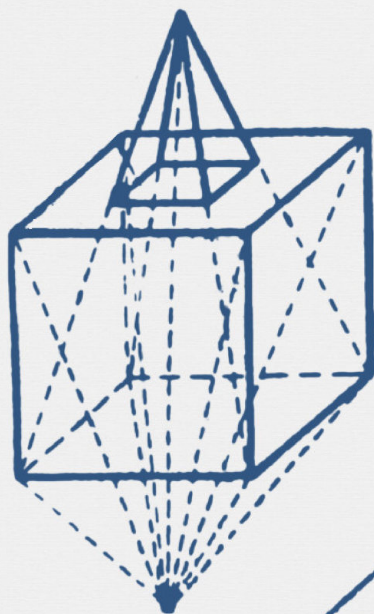
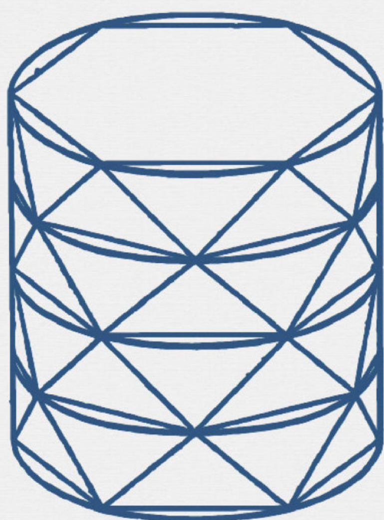
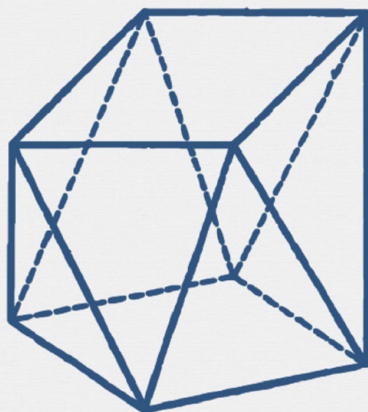
АКАДЕМИЯ НАУК СССР



Р. Н. Бончковский

ПЛОЩАДИ И ОБЪЕМЫ





АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Р. Н. БОНЧКОВСКИЙ

ПЛОЩАДИ И ОБЪЕМЫ

Ответственный редактор
проф. А. М. Журавский



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
Москва 1937 Ленинград

Научно-популярная серия

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эту книгу я писал для учащихся и передовых рабочих, желающих расширить свой умственный кругозор и повысить свои знания, но, несомненно, число ее возможных читателей значительно шире. В ней рассматриваются важнейшие понятия метрической (измерительной) геометрии — понятия о площади и объеме. Так как я писал не учебник, а книгу для свободного чтения, то я считал не только возможным, но даже необходимым, выйти за рамки материала, обычно излагаемого в учебниках. В связи с этим пришлось затронуть многие смежные области геометрии, так что в целом книга охватывает обширный круг геометрических вопросов. Несмотря на это, для чтения книги требуется самая незначительная подготовка: из алгебры требуется знание действий над положительными и отрицательными числами и понимание буквенных обозначений, т. е. то, что составляет программу шестого и седьмого классов школы; что же касается геометрии, то необходимо лишь знакомство с такими понятиями, как «прямой угол», «параллельные прямые», «перпендикуляр», «диагональ» и т. п. Все остальное объясняется в самой книге.

Изложение я постарался сделать возможно более наглядным. Читатель заметит, что в книге вовсе нет строгих логических доказательств; во всех случаях я старался создать перед умственным взором читателя отчетливую картину рассматриваемых соотношений, чтобы таким образом привести его к уяснению существа дела. В связи с такой системой изложения чертежи играют в этой книге очень значительную роль; читатель не должен относиться к ним как к чему-то постороннему, но должен рассматривать их самым внимательным образом.

Хочу предупредить читателя, что в своей книге я даю большую и трудную работу его воображению. Но мне представляется, что эта работа не пропадет даром. Она должна обогатить геометрическую фантазию читателя и тем самым поднять его умственные силы на новую, более высокую ступень. Всякое техническое усовершенствование, будь то создание новой машины или рационализация производственного процесса, большей частью связано с решением ряда геометрических задач и потому может быть осуществлено лишь человеком, обладающим сильной геометрической фантазией. Но, как и другие способности человека, геометрическая фантазия развивается только при условии упражнения.

Р. Бончковский

Глава первая

ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Многие думают, что измерение и вычисление площадей — дело вовсе не трудное. Еще из школы каждый помнит, что для определения площади нужно измерить ее длину и ширину и полученные числа перемножить. Так, например, если комната имеет в длину 8 м, а в ширину 4 м, то ее площадь равна $8\times4=32$ м². [1]

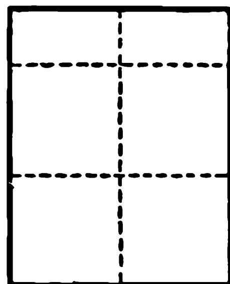


Рис. 1

На рис. 1 изображен четырехугольник, ширина которого 2 см, а длина 2.5 см. Значит, площадь этого четырехугольника $2\times2.5=5$ см². Что это действительно так, не трудно проверить. Вертикальная линия, проведенная посередине четырехугольника, делит его на две полосы одинаковой ширины в 1 см. Проведем еще две горизонтальные линии, как это показано на рисунке; тогда четырехугольник распадется на шесть неодинаковых частей. Из них четыре нижних части представляют собой квадраты со сторонами в 1 см; значит каждая из этих частей

[1] Буква м заменяет слово «метр», а м² — слова «квадратный метр».

есть квадратный сантиметр. Что касается двух верхних частей, то каждая из них есть половина квадратного сантиметра и, значит, вместе они составляют один квадратный сантиметр. Всего, следовательно, мы имеем четыре полных квадратных сантиметра и один квадратный сантиметр, составленный из двух половинок, т. е. пять квадратных сантиметров, — как раз столько, сколько мы получили вычислением.

Задача делается более трудной, если четырехугольник не имеет такой правильной формы, как на рис. 1. Например, на рис. 2 изображен косой четырехугольник. Его ширина внизу меньше, чем вверху, а длина в правой части больше, чем в левой. Поэтому, очевидно, наше правило здесь не применимо.

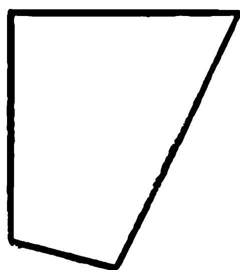


Рис. 2

Четырехугольник такой формы, как на рис. 1, называется прямоугольником. Можно сказать, что наше правило вычисления площадей верно только для прямоугольников. Только площадь прямоугольника можно найти, перемножая его длину на ширину.

Чтобы определить площадь какого-либо другого четырехугольника, стараются превратить его в прямоугольник, для чего разрезают его на части так, чтобы из этих частей можно было сложить прямоугольник. Очевидно, площадь полученного прямоугольника равна площади первоначального четырехугольника: ведь они состоят из одинаковых частей.

Этот прием легче всего пояснить на примере превращения параллелограма в прямоугольник. Параллелограм обладает тем свойством, что его противоположные стороны параллельны друг другу, т. е. все точки одной стороны находятся на одном и том же расстоянии от противоположной стороны (рис. 3), но в отличие от прямоугольника углы параллелограма не прямые. Одну из сторон парал-

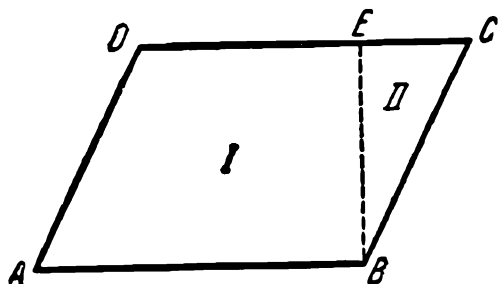


Рис. 3

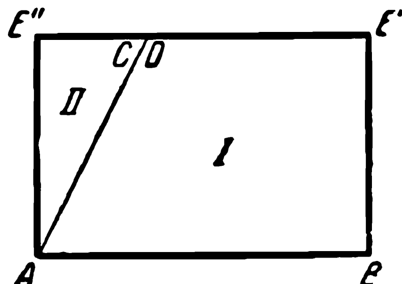


Рис. 4

лелограма считают его основанием; мы за основание параллелограма, изображенного на рис. 3, принимаем сторону AB. Расстояние от основания до противоположной стороны параллелограма считается его высотой; высоту нашего параллелограма можно измерять, например, по линии EB.

Разрежем параллелограм $ABCD$ по линии EB на две части и сложим из них прямоугольник, как это показано на рис. 4. Площадь прямоугольника $ABE'E''$ равна произведению его длины AB на ширину BE'. Но площадь прямоугольника равна площади первоначального параллелограма, его длина AB равна основанию параллелограма, а ширина —

высоте параллелограма. Поэтому, чтобы определить площадь параллелограма, нужно длину его основания умножить на его высоту.

Конечно, для того, чтобы превратить параллелограм в прямоугольник, можно было разрезать его и иначе. На рис. 5 параллелограм разрезан по линии *GH*, а на рис. 6 показано, как сложить получившиеся части, чтобы образовался прямоугольник.

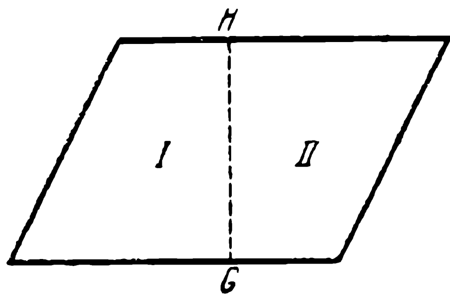


Рис. 5

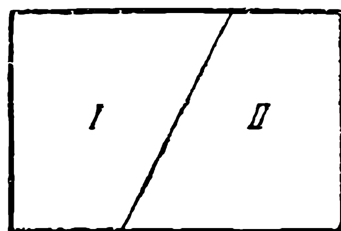


Рис. 6

Поступая подобным же образом, можно треугольник превратить в прямоугольник и установить правило для вычисления площади треугольника. В самом деле, пусть требуется треугольник *ABC* (рис. 7) превратить в прямоугольник. Для этого на сторонах *AC* и *CB* треугольника берем точки *D* и *E*, делящие пополам эти стороны, и разрезаем треугольник *ABC* по линиям *DF* и *EG*, составляющим прямые углы с основанием треугольника (т. е. с линией *AB*). Треугольник распадается после этого на три части, из которых можно сложить прямоугольник, как это показано на рис. 8.

Определим теперь площадь треугольника *ABC* (рис. 7). Очевидно, его площадь равна площади прямоугольника *FGKJ* (рис. 8). Поэтому вместо площади треугольника можно вычислить площадь прямоугольника. Но ширина *FG* прямоугольника равна половине основания *AB* треугольника, потому что два основания прямоугольника *JK* и *FG* состоят из трех частей: *JC*, *CK* и *FG*, которые до

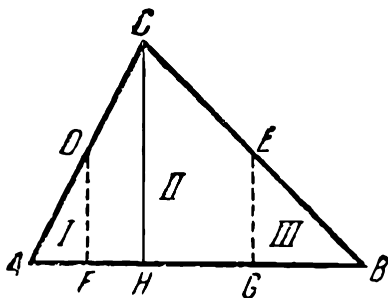


Рис. 7

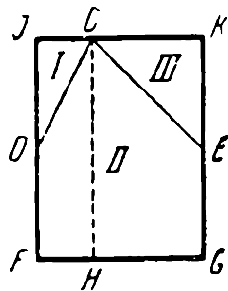


Рис. 8

разрезания составляли основание треугольника; высота же *CH* треугольника равна длине *CH* прямоугольника. Следовательно, чтобы определить площадь треугольника, мы должны умножить половину длины его основания на его высоту.

Конечно, превратить треугольник в прямоугольник можно не только описанным способом, но и многими другими. Можно, например, разрезать треугольник так, как это показано на рис. 9, и затем сложить прямоугольник, как показано на рис. 10. Если пользоваться этим способом превращения треугольника в прямоугольник, то придется для вычисления площади треугольника установить другое

правило, а именно: площадь треугольника равна произведению длины его основания на половину его высоты. Ведь длина получившегося прямоугольника равна основанию треугольника, а его ширина—половине высоты треугольника; между тем площадь треугольника равна площади получившегося прямоугольника.

Надо сказать, что хотя мы и получили два различных правила, результат они дают один и тот же.

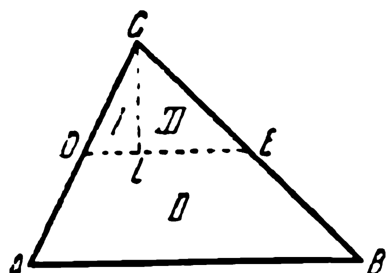


Рис. 9

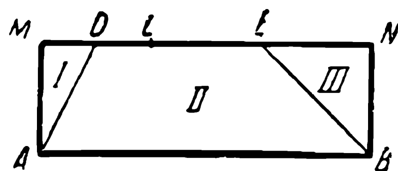


Рис. 10

Ведь очевидно, что оба произведения (половина основания на высоту и основания на половину высоты) равны половине произведения основания треугольника на его высоту и, следовательно, равны друг другу.

Для треугольника, изображенного на рис. 11, можно видоизменить оба описанных выше способа и поступить так, как показано на рисунках 11 и 12. Но очевидно и в этом случае мы получаем прежнее правило.

Трапеция превращается в прямоугольник совершенно так же, как треугольник. Для этого на

боковых ее сторонах выбираем точки E и F, делящие их пополам (рис. 13), и через эти точки делаем разрезы по линиям EG и FH, составляющим прямые

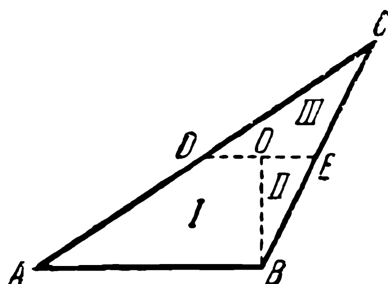


Рис. 11

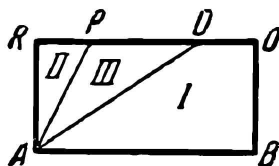


Рис. 12

углы с основанием AB. Рис. 14 показывает, как из полученных частей можно сложить прямоугольник.

Чтобы вывести правило для вычисления площади трапеции, сравним рисунки 13 и 14. Верхнее и нижнее основания трапеции состоят из четырех отрезков: AG, GH, HB и CD. Из таких же четырех

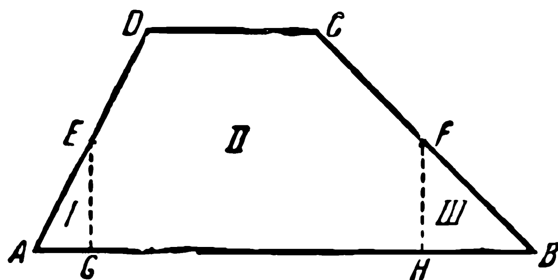


Рис. 13

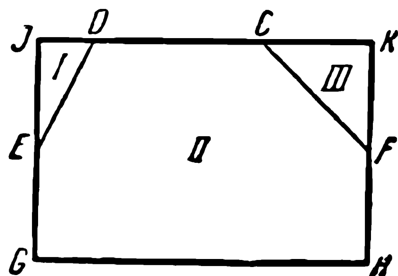


Рис. 14

отрезков: JD, GH, CK и DC состоят верхнее и нижнее основания прямоугольника, так как $AG=JD$, $GH=GH$, $HB=CK$, $DC=DC$. Таким образом, сумма оснований трапеции равна сумме оснований прямо-

угольника; следовательно, основание (или иначе — длина) прямоугольника равна полусумме оснований трапеции. Площадь трапеции равна площади прямоугольника. Но площадь прямоугольника равна произведению его основания (т. е. полусумме оснований трапеции) на его высоту (которая равна высоте трапеции). Значит, площадь трапеции равна полусумме оснований, умноженной на высоту.

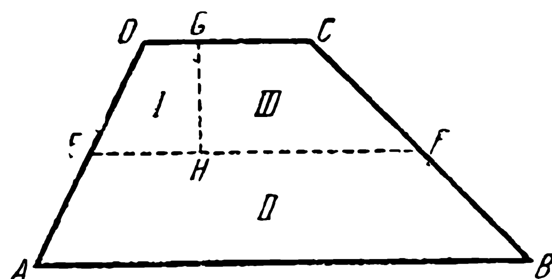


Рис. 15

Трапецию так же, как и треугольник, можно различными способами превратить в прямоугольник. На рис. 15 и 16 показано превращение трапеции в прямоугольник, аналогичное такому же превращению треугольника, показанному на рис. 9 и 10. Рассмотрев рисунки 15 и 16, можно убедиться, что площадь трапеции равна сумме ее оснований, умноженной на половину высоты. Но, как и в случае треугольника, это правило для вычисления площади трапеции дает тот же результат, что и предыдущее.

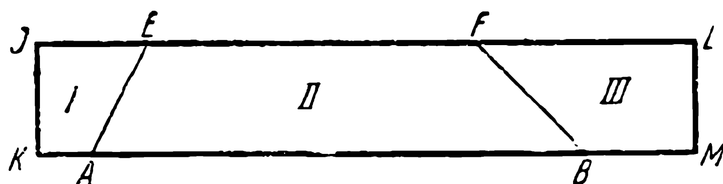


Рис. 16

В связи с изложенным выше возникает вопрос, в каком случае два различных многоугольника

можно разрезать на одинаковые части (и, значит, превратить один многоугольник в другой при помощи разрезания и перекладывания получившихся частей). Оказывается для этого достаточно, чтобы оба многоугольника имели одну и ту же площадь.

Покажем сначала, что если два прямоугольника имеют одинаковую площадь, то один из них можно превратить в другой. Пусть, например, прямоугольник *ABCD* равновелик (т. е. имеет одинаковую площадь) с прямоугольником *EFGH* (рис. 17а и 17b). На стороне второго, более высокого прямоугольника, отложим отрезок *EJ*, равный стороне *AD* первого прямоугольника. Оставшийся отрезок *JH* разделим пополам и обозначим его середину буквой *K*. Наконец, от точки *F* на стороне *FG* отложим отрезок *FL*, равный отрезку *HK*, соединим точки *K* и *L* и по линии *KL* сделаем разрез. Тогда прямоугольник *EFGH* распадается на две части. Расположим их так, как показано на рис. 18, проведем из точки *J* линию *JM* под прямым углом к стороне *EK* и по этой линии отрежем маленький треугольничек *JMK*. Точно такой же треугольничек отрежем по линии *PN* около вершины *L*. Вложив отрезанные треугольнички в оставшиеся углубления, получим прямоугольник, равный прямоугольнику *ABCD* (рис. 19).

Покажем теперь, как можно любой многоугольник превратить в другой, равновеликий ему многоугольник. На рис. 20 даны пятиугольник и шести-

угольник, имеющие одинаковую площадь. По диагоналям (т. е. по прямым, соединяющим вершины многоугольника) разрезаем многоугольники на треугольники, а затем каждый из треугольников пре-

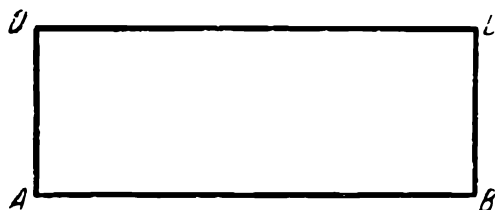


Рис. 17a

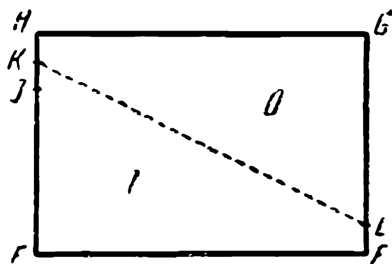


Рис. 17b

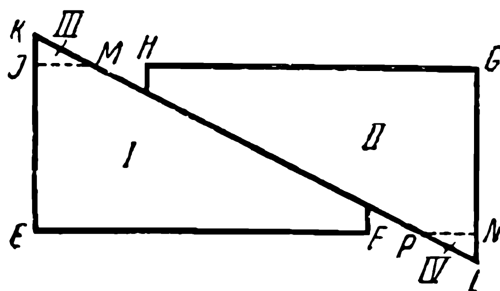


Рис. 18

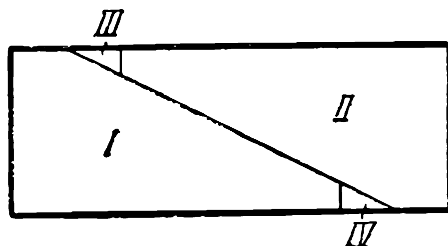


Рис. 19

вращаем в прямоугольник приемом, с которым мы познакомились выше. Выбираем теперь отрезок определенной длины и все прямоугольники, как показано на рис. 17, 18 и 19, превращаем в такие прямоугольники, у которых одна сторона равнялась бы этому отрезку. Приложим теперь друг к другу равными сторонами все прямоугольники, получившиеся из пятиугольника; они составят прямоугольник, площадь которого равна площади пятиугольника (левый прямоугольник на рис. 21). Подобным же образом, прикладывая друг к другу равными сторонами

прямоугольники, образовавшиеся из шестиугольника, получим прямоугольник, площадь которого равна площади шестиугольника (правый прямоугольник на рис. 21).

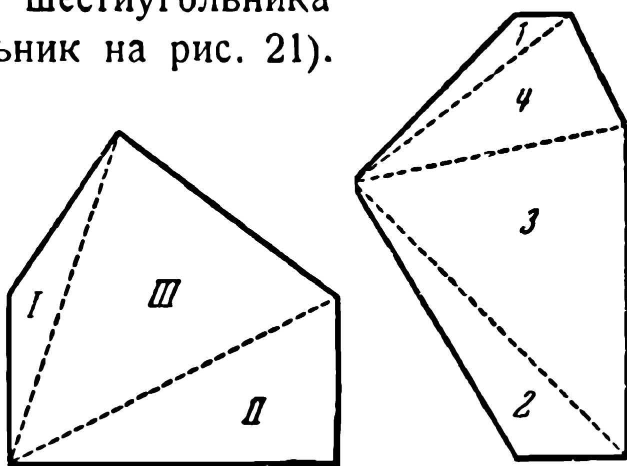


Рис. 20

Но левый и правый прямоугольники на рис. 21 равны, так как они имеют равные основания и равные площади.

Теперь нетрудно понять, как можно пятиугольник превратить в шестиугольник. Для этого нужно сначала превратить пятиугольник в левый прямоугольник на рис. 21, затем разрезать его так, как разрезан правый прямоугольник на рис. 21, каждый из полученных маленьких прямоугольников превратить в соответствующую треугольную часть шестиугольника и, наконец, из этих частей сложить шестиугольник.

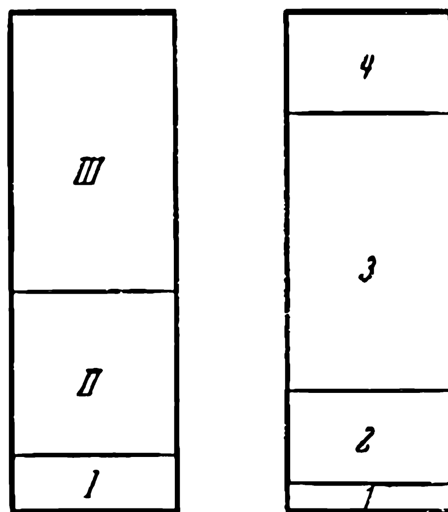


Рис. 21

Если расценивать все рассмотренные преобразования с практической точки зрения, то польза их

покажется весьма сомнительной. Даже в простых случаях получаются довольно сложные преобразования. Но нужно уметь оценивать вещи не только с практической стороны. Принципиальное значение рассмотренных преобразований очень велико. Они выявляют самое существо понятия «площадь» и выясняют значение слов: «площади равны». Эти слова означают лишь то, что сравниваемые площади можно составить из одинаковых кусков.

Для практических целей при измерении площади многоугольника нет надобности превращать измеряемый многоугольник в прямоугольник. Обычно поступают так: разбивают многоугольник на треугольники с помощью диагоналей, как это мы делали на рис. 20, измеряют основания и высоты полученных треугольников, вычисляют площади этих треугольников и полученные числа складывают. В результате получают площадь многоугольника.

Это значит, что на практике геометрическую задачу подменяют арифметической; вместо того, чтобы из кусков складывать прямоугольник, площадь которого легко определяется, складывают числа, которыми измеряются площади всех этих кусков.

Конечно, разбивать многоугольник на треугольники можно различными способами. Можно, хотя бы, взять внутри многоугольника произвольную точку O и соединить ее со всеми вершинами многоугольника (рис. 22). Площадь многоугольника будет равна сумме площадей построенных таким образом треугольников.

Можно, наконец, разбивать многоугольник не на треугольники, а на какие-нибудь другие фигуры. Для этой цели чаще всего пользуются помимо треугольников еще прямоугольниками и трапециями. На рисунке 23 пятиугольник разбит на 2 треугольника и 2 трапеции.

Но если вычисления площадей удобнее сводить к арифметическим подсчетам, то доказательствам

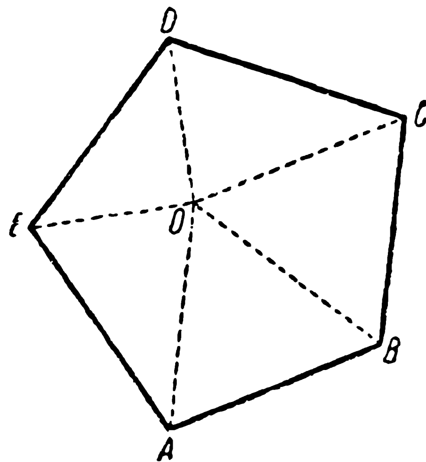


Рис. 22

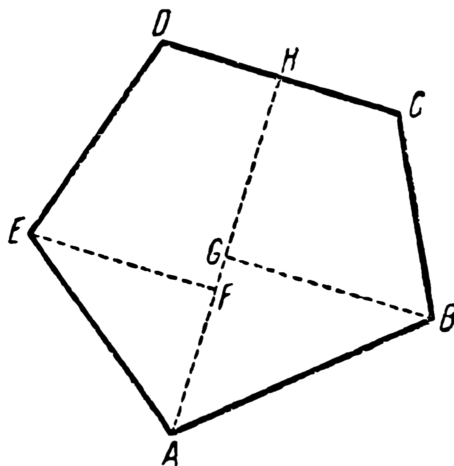


Рис. 23

многих теорем, связанных с площадями, можно придать очень наглядную форму, если проводить их чисто геометрически. Мы убедимся в этом, если рассмотрим следующее геометрическое доказательство теоремы Пифагора.

Возьмем какой-нибудь прямоугольный треугольник и на его сторонах построим квадраты, как это сделано на рис. 24. По теореме Пифагора сумма площадей квадратов, построенных на сторонах, составляющих прямой угол (на катетах), равна площади квадрата, построенного на третьей стороне (на гипо-

тенузе). Это значит, что на нашем рисунке площадь *ABIH* должна быть равна сумме площадей *ACED* и *CBGF*. Иногда теорему Пифагора кратко выражают так: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Приступим к доказательству теоремы Пифагора. Наибольший из квадратов перевернем, поворачивая его вокруг гипотенузы. Тогда он займет положение, отмеченное пунктиром. Разрежем теперь два меньших квадрата вдоль краев большого, т. е. по линиям *AK*, *LM* и *MB*, отмеченным жирным пунктиром. Тогда два меньших квадрата распадутся на 5 частей, отмеченных римскими цифрами I, II, III, IV и V. Остается показать, что большой квадрат можно разрезать на пять таких же частей.

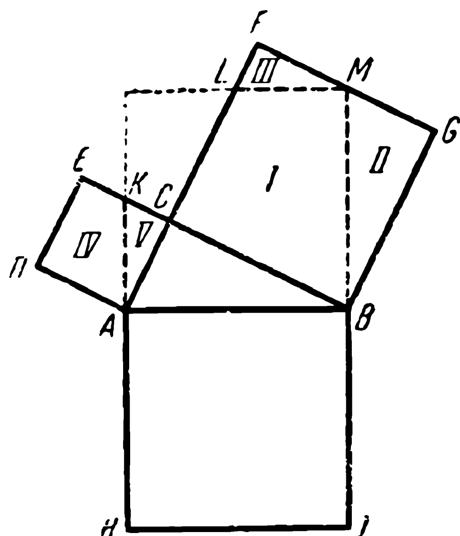


Рис. 24

Перевернем теперь средний квадрат, поворачивая его вокруг катета *CB*. Он займет положение, показанное пунктиром на рис. 25. Очевидно, часть *ABON* равна части *I* среднего квадрата.

Продолжим линию *NO* до точки *I*, линию *BO* до пересечения со стороной *HI* большого квадрата и, наконец, из вершины *H* проведем линию, составляющую прямой угол с *NO*. Если большой ква-

драт разрезать вдоль всех этих линий, то он распадется на 5 таких же частей, на которые были разрезаны и два меньших квадрата. На рис. 26 одинаковые части помечены одинаковыми римскими цифрами.

Итак, теорема Пифагора нами доказана.[1]

Зная длину двух сторон прямоугольного треугольника, мы с помощью теоремы Пифагора можем найти длину третьей стороны. Допустим, например, что один катет прямоугольного треугольника равен 3 см, а другой 4 см. Тогда площади квадратов, построенных на этих катетах, будут равны 9 и 16 см², а их сумма 25 см². Но если площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна 25 см²,

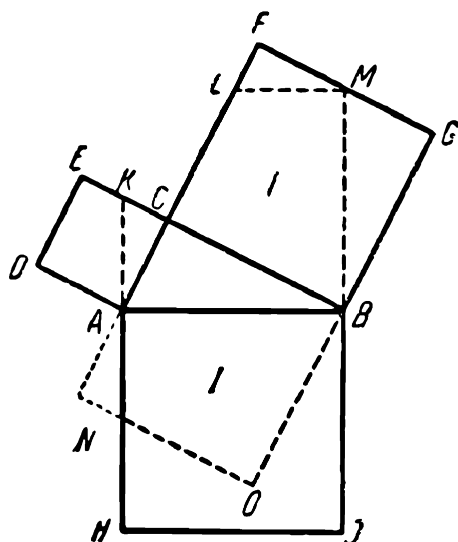


Рис. 25

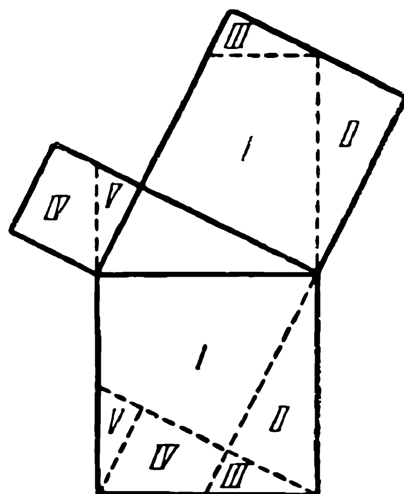


Рис. 26

[1] Чтобы не входить в детали, мы опустили доказательство равенства отдельных частей квадратов. Для полной строгости оно необходимо.

то сама гипотенуза должна быть равна 5 см. Таким образом, задача решена.

Если же известна длина гипотенузы и одного из катетов, то с помощью теоремы Пифагора можно найти длину другого катета. Пусть, скажем, гипотенуза равна 13 м, а один из катетов 5 м. Тогда площади квадратов, построенных на этих сторонах, будут равны 169 $м^2$ и 25 $м^2$. Площадь квадрата, построенного на втором катете, должна быть, очевидно, равна разности этих площадей, т. е. 144 $м^2$. Отсюда видно, что второй катет равен 12 м.

При решении как первой, так и второй задач нам приходилось, зная квадрат числа, находить это число. В первом случае мы узнали, что квадрат гипотенузы равен 25 $см^2$ и должны были догадаться, что гипотенуза равна 5 см, потому что $5 \times 5 = 25$. Во втором случае мы узнали, что квадрат катета равен 144 $м^2$, и опять-таки при помощи догадки нашли, что катет равен 12 м. Далеко не всегда так легко догадываться, чему равно число, квадрат которого известен, или, как говорят, извлекать квадратные корни. Так, каждый легко угадает, что квадратный корень из 64 равен 8, но едва ли кто-нибудь догадается, что квадратный корень из 3 равен 1.73, а квадратный корень из 5 равен 2.24. [1]

---

[1] Оба квадратных корня даны не совсем точно. В действительности квадратный корень из 3 больше 1.73, но меньше 1.74, а квадратный корень из 5 больше 2.23 и меньше 2.24.

В алгебре доказывается, что эти корни нельзя выразить точно, даже если увеличить число десятичных знаков

Для обозначения действия извлечения квадратного корня употребляется знак $\sqrt{\ }$. Следовательно, $\sqrt{9}=3$, $\sqrt{16}=4$, $\sqrt{25}=5$, $\sqrt{169}=13$, $\sqrt{3}=1.73$, $\sqrt{5}=2.24$.

Для быстрого извлечения квадратных корней употребляются специальные таблицы. Мы можем рекомендовать таблицы Брадиса или Пржевальского. Научиться пользоваться ими может каждый в течение 15—20 минут — к ним приложены специальные пояснения. Таблицы квадратных корней можно найти также во всех технических справочниках.

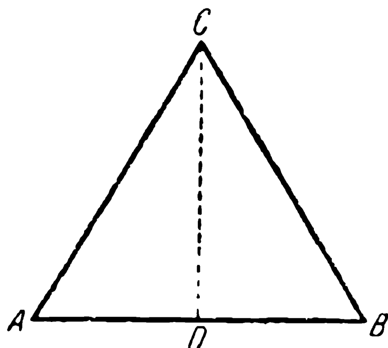


Рис. 27

Приведем еще один пример применения теоремы Пифагора. Рассмотрим равносторонний (правильный) треугольник со сторонами, равными одному метру (рис. 27), и попробуем найти его площадь.

Чтобы найти площадь треугольника, надо знать его основание и высоту; в нашем случае основание равно 1 м, а высота не известна. Соединим середину основания треугольника линией DC с противоположной вершиной. Очевидно, DC как раз и есть высота треугольника ABC. Но CD есть в то же время катет прямоугольного треугольника ADC, в котором гипотенуза AC равна 1 м, и катет AD равен $\frac{1}{2}$ м. Квадрат другого катета равен разности квадратов

гипотенузы и первого катета. Квадрат гипотенузы равен $1^2 = 1$ м², а квадрат первого катета $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ м². Значит, квадрат второго катета равен $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ м². Извлекая квадратный корень из этого числа, получим: $CD = \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{0.75} = 0.87$ м².

Площадь треугольника равна $\frac{1}{2} \times 1 \times 0.87 = 0.435$ м²

Задачи к первой главе

1. Правильный шестиугольник[1] разрезать на две части и сложить из них параллелограм. Вывести отсюда правило для вычисления площади правильного шестиугольника.

2. Из частей двух равных квадратов сложить квадрат.

3. Произвольный четырехугольник превратить в прямоугольник, разрезав его на пять частей.

4. Прямоугольник, длиной в 9 см и шириной в 4 см, разрезать на две части и сложить из них квадрат.

5. На какое наименьшее число треугольников можно разрезать семиугольник.

6. Показать, что площадь всякого правильного многоугольника равна половине произведения периметра[2] на апофему.

---

[1] Шестиугольник называется правильным, если все его стороны так же, как и все его углы, равны между собой.

[2] Периметром называется сумма сторон многоугольника, а апофемой расстояние от центра правильного многоугольника до любой из его сторон.

Глава вторая

ЗВЕЗДЧАТЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ И ИХ ПЛОЩАДИ

Пусть на плоскости совершенно произвольным образом даны четыре точки *A*, *B*, *C*, *D* (рис. 28). Соединим их по порядку прямыми линиями: первую точку со второй, вторую с третьей, третью с четвертой и четвертую с первой. Так как от нас зависит, какую точку считать первой, какую второй и т. д., то при соединении их могут получиться различные ломаные линии, но все они будут замкнутыми (т. е. не будут иметь свободных концов), потому что последняя (четвертая) точка соединяется с первой.

D
C
A
B

Рис. 28

Рассмотрим сначала, какие ломаные линии получатся, если мы будем начинать построение с точки *A*. Они изображены у нас на рисунках 29a—f; их всего шесть. Действительно, если первой точкой считать *A*, то второй точкой можно считать любую из остальных трех точек. Если второй точкой считать *B*, то третьей точкой будет *C* или *D*, а четвертой та, которая останется после выбора третьей; получаем ломаные,

изображенные на рис. 29a и 29b. Если же второй точкой выбрать C, третьей может быть выбрана B или D, а четвертой та, которая останется после этого выбора; получаем ломаные, изображенные на рис. 29c и 29d. Наконец, взяв второй точкой D, получим ломаные, изображенные на рис. 29e и 29f.

Мы получим те же 6 ломаных, если начнем чертить их не с точки A, а с любой из остальных трех точек. Например, если мы начинаем чертить с точки B, то можем проходить наши точки одним из следующих шести способов: $BACD$, $BADC$, $BCAD$, $BCDA$, $BDAC$, $BDCA$ и, очевидно, получим опять те же ломаные, начерченные на рис. 29d, 29f, 29e, 29a, 29c, 29b. Таким образом, имея на плоскости 4 точки, мы с их помощью можем начертить 6 ломаных линий, вершинами которых служат эти точки.

Вглядимся в рис. 29 внимательно. Фигуры, изображенные на рис. 29a и 29f, мы без всяких затруднений назовем четырехугольниками; это — четырехугольники в самом обыкновенном, житейском смысле слова, в том самом смысле, в каком мы употребляли это слово в предыдущей главе. Посмотрим же, что общее имеется у этих фигур и у фигур, помещенных на рис. 29b—e. На всех шести рисунках фигуры составлены из четырех прямолинейных отрезков: на рис. 29a и 29f из отрезков AB, BC, CD и DA, на рис. 29b и 29d из отрезков AC, CD, DB и BA и на рисунках 29c и 29e из отрезков AC, CB, BD и DA. Назовем отрезки, составляющие

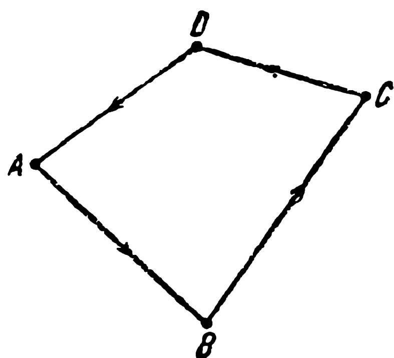


Рис. 29a

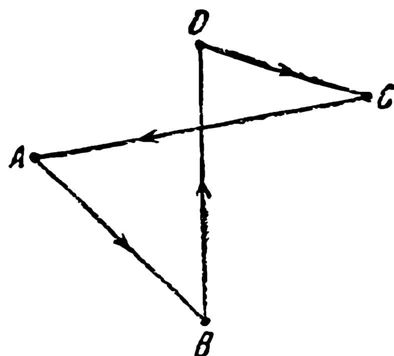


Рис. 29b

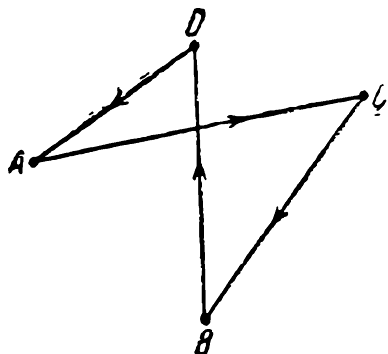


Рис. 29c

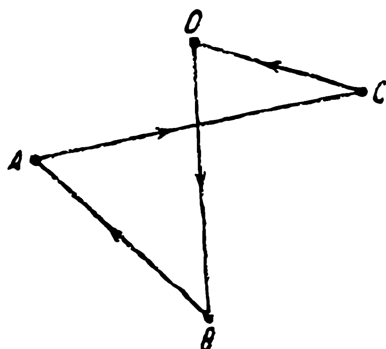


Рис. 29d

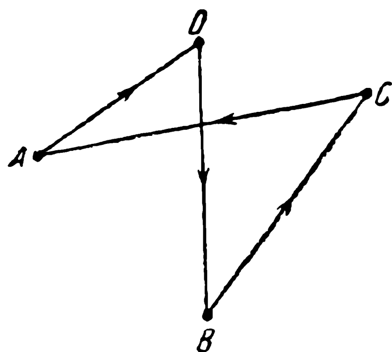


Рис. 29e

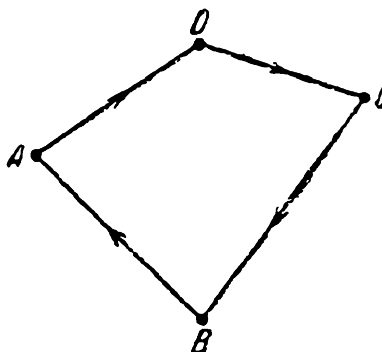


Рис. 29f

наши фигуры, их сторонами, а точки, в которых сходятся концы двух сторон — вершинами фигур. Очевидно, все шесть фигур имеют по 4 вершины, потому что точку пересечения сторон *AC* и *BD* на рис. 29b—e нельзя считать вершиной, так как она не является концом какой-либо стороны. Наконец, если сосчитать углы между соседними сторонами, т. е. между сторонами, имеющими общий конец, то каждая из шести фигур имеет четыре угла (например, фигура 29b имеет углы *ABD*, *BDC*, *DCA*, *CAB*. Угол между прямыми *AC* и *BD* не считается углом нашей фигуры, потому что эти стороны не имеют общего конца). Таким образом, мы видим, что полученные нами фигуры очень похожи на обыкновенные четырехугольники: каждая из них имеет четыре стороны, четыре вершины и четыре угла. Такое близкое сходство дает нам право все эти фигуры называть четырехугольниками.

Совершенно так же, как мы построили 6 четырехугольников с вершинами в четырех данных точках, можно построить 24 пятиугольника с вершинами в пяти данных точках, 120 шестиугольников с вершинами в шести данных точках и т. д. Треугольников с вершинами в трех данных точках можно построить два; они представлены на рис. 30 и отличаются друг от друга лишь тем, что при их вычерчивании вершины соединяются в противоположном порядке. Так, при вычерчивании левого треугольника точки соединяются в следующем направлении: сначала *A* с *B* (как это показано стрелкой), затем *B* с *C* и,

наконец, *C* с *A*; при вычерчивании правого треугольника соединение выполняется в обратном направлении: сначала *A* соединяется с *C*, затем *C* с *B* и, наконец, *B* с *A*. То же самое мы можем выразить иначе: граница левого треугольника при вычерчивании проходится в направлении, противоположном движению часовой стрелки, а граница правого —

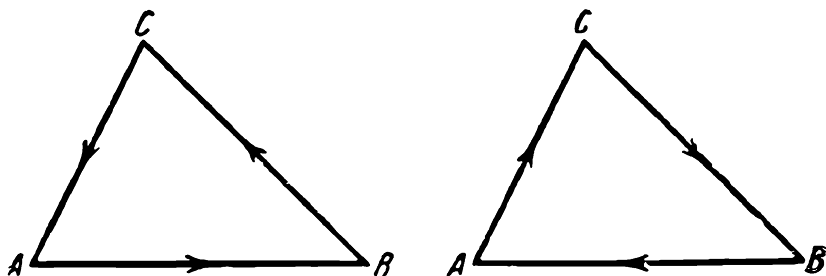


Рис. 30

в направлении движения часовой стрелки. Итак, треугольники на рис. 30 различаются противоположным направлением обхода их границ. То же самое можно сказать и о парах четырехугольников *ABCD* и *ADCB* (рис. 29 a и f), *ABDC* и *ACDB* (рис. 29 b и d), *ACBD* и *ADBC* (рис. 29 c и e). Два четырехугольника каждой из этих пар отличаются друг от друга только направлением обхода их границ; во всех остальных отношениях они совершенно одинаковы. Очевидно, что 24 пятиугольника распадутся на 12 пар и 120 шестиугольников на 60 пар, причем два многоугольника каждой пары будут отличаться только направлением обхода их границ. То же самое можно сказать и о многоугольниках с большим числом сторон.

Из этого обстоятельства вытекает важное следствие: очевидно, на многоугольники могут существовать две совершенно различных точки зрения. Так, прежде всего, можно вовсе не различать многоугольники, отличающиеся только направлением обхода их границ, т. е. считать их тождественными, равными. Такой точки зрения мы придерживались в первой главе; так как направление обхода границы многоугольника в этом случае не играет никакой роли, то мы вовсе о нем не говорили. Эту точку зрения мы будем называть «элементарной». Но возможна и другая точка зрения, принимающая во внимание направление обхода границы многоугольника. Если стать на эту точку зрения, то многоугольники, отличающиеся только направлением обхода границ, следует считать различными. Эту вторую точку зрения можно назвать «алгебраической», по причинам, которые выяснятся в дальнейшем.

Первая, элементарная точка зрения проще и нагляднее; происхождение ее теряется в глубокой древности. Во всяком случае уже 4000 лет назад древние культурные народы, например, египтяне и вавилоняне, изучали геометрические фигуры, причем стояли всецело на этой элементарной точке зрения. Она и до сих пор господствует во всех школьных учебниках геометрии.

Вторая точка зрения возникла много позднее. Хотя еще в знаменитом сочинении «Гармония мира» (1619 г.) великого математика, механика и астронома

Кеплера рассматривается звездчатый пятиугольник (рис. 31) и правильно указывается порядок обхода его сторон, но многоугольники с различным обходом сторон не различаются. Впервые ввел это различие французский математик Пуансо (в 1810 г.), но он ограничился рассмотрением почти исключительно правильных многоугольников. Только в 1865 г. немецкий математик Мебиус дал общую теорию звездчатых многоугольников, в которой строго проведена алгебраическая точка зрения. Он впервые показал, что и для звездчатых многоугольников можно ввести понятие о площади, причем сделать это можно только в том случае, если считать различными многоугольники с противоположным направлением обхода границы. Учение Мебиуса о многоугольниках быстро получило признание среди математиков. В настоящее время «новое учение о многоугольниках» постепенно проникает во все области геометрии. Наиболее интересная его часть — учение о площадях звездчатых многоугольников. К изложению этого учения мы и переходим.

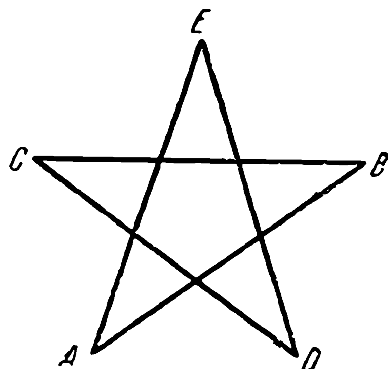


Рис. 31

Представим себе сделанный из проволоки равносторонний треугольник (рис. 32), сторонам которого придан вид стрелок (для этого достаточно сделать на проволоке маленькие зарубки), — стрелки указывают направление сторон. На плоскость такой

треугольник можно положить двумя способами: на одну или на другую сторону; при этом, если положить треугольник на одну сторону, то зарубки на его сторонах укажут направление обхода, противоположное направлению часовой стрелки; если же положить его на другую сторону, то направление обхода его сторон будет совпадать с направлением движения часовой стрелки. Этот пример показывает, что в новом учении о многоугольниках перевертывать многоугольник нельзя, так как при перевертывании он превращается в другой многоугольник, имеющий противоположное направление обхода, т. е. изменяется.

То же самое можно пояснить иначе. Представим себе треугольник в виде пластинки, одна сторона которой выкрашена в красный цвет, а другая — в синий. Этот треугольник можно положить на плоскость или красной, или синей стороной вверх. При перевертывании он будет поворачиваться к нам другой своей стороной, т. е. нам будет казаться, что он меняет свой цвет: красный треугольник при перевертывании будет превращаться в синий, а синий — в красный. Если на красной стороне мы поставим знак плюс, а на синей знак минус, и будем называть треугольник положительным, если он повернут к нам красной стороной, и отрицательным в противоположном случае, то можно сказать, что при перевертывании треугольник меняет свой знак.

Условимся, что в этой книге в красный цвет мы будем окрашивать ту сторону треугольника,

которая обходится в направлении, противоположном движению часовой стрелки (будем считать ее положительной стороной треугольника); другую сторону мы будем окрашивать в синий цвет (будем считать ее отрицательной). На рис. 32a и 32b наглядно показана связь между направлением обхода, цветом и знаком треугольника.

Площади треугольников мы будем измерять так, как это делалось в первой главе, но перед числом,



Рис. 32a

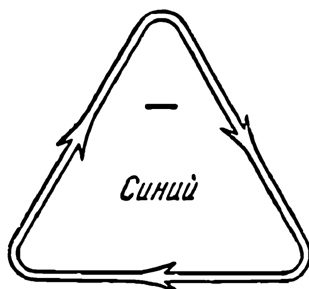


Рис. 32b

показывающим площадь треугольника, всегда будем ставить знак плюс или минус, в зависимости от того, какой стороной повернут к нам этот треугольник — красной (положительной) или синей (отрицательной). Так, например, если площадь треугольника равна — 10 см² (минус десяти), то это значит, что треугольник повернут к нам своей синей (отрицательной) стороной, а по величине его площадь равна 10 см².

После этих предварительных замечаний можно перейти к рассмотрению площадей произвольных многоугольников. Сначала остановимся на четырех-

угольнике $ABDC$ (рис. 29b и 33). Этот четырехугольник может быть образован из двух треугольников: (положительного) ABE и (отрицательного) DCE, но при таком рассмотрении четырехугольник оказывается состоящим не из одного куска, а из двух, а это противоречит нашему представлению о четырехугольнике как о едином образе. Мы поступим несколько иначе. Мы будем рассматривать четырех-

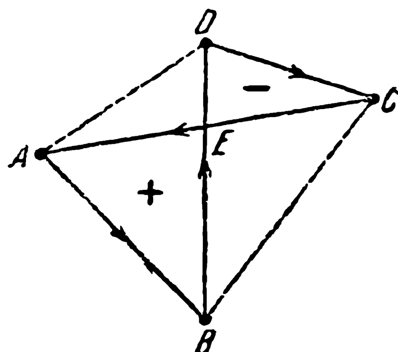


Рис. 33

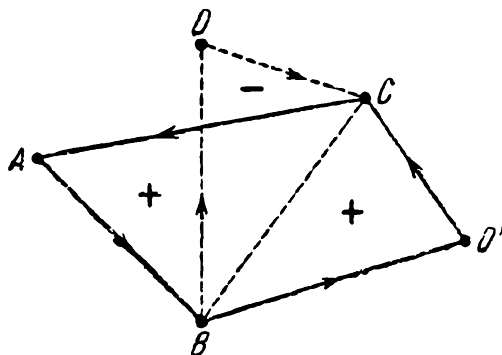


Рис. 34

угольник $ABDC$ как состоящий из двух треугольников: ABC и BDC. Такое представление оправдывается следующим соображением: возьмем четырехугольник $ABD'C$ (рис. 34), повернутый к нам своей положительной стороной (т. е. красной), и перегнем его по диагонали BC. Тогда треугольник $BD'C$ повернется к нам своей отрицательной стороной (синей) и займет положение BDC. В этом случае линия $ABDC$ будет границей нашего согнутого куска. В самом деле, стороны CA и AB служат границей треугольника ABC, а стороны BD и DC—границей треугольника BDC. BC является линией сгиба куска и в границу последнего не входит.

Этот пример показывает, что звездчатый многоугольник можно рассматривать как границу некоторого плоского куска, быть может, согнутого в несколько раз.

Теперь не трудно понять, что следует считать площадью четырехугольника *ABDC*. Поскольку он состоит из треугольников *ABC* и *BDC*, вполне естественно считать, что площадь его равна сумме площадей этих треугольников. Площадь первого треугольника равна приблизительно (+2.5) см², а площадь второго (—0.8) см² (площадь первого взята со знаком плюс, так как он повернут к нам своей положительной стороной; площадь второго со знаком минус, так как он повернут к нам своей отрицательной стороной). Сумму этих двух чисел находим по правилам алгебры: (+2.5) + (—0.8) = +2.5 —0.8 = = + 1.7 см². Итак, площадь нашего четырехугольника равна 1.7 см².

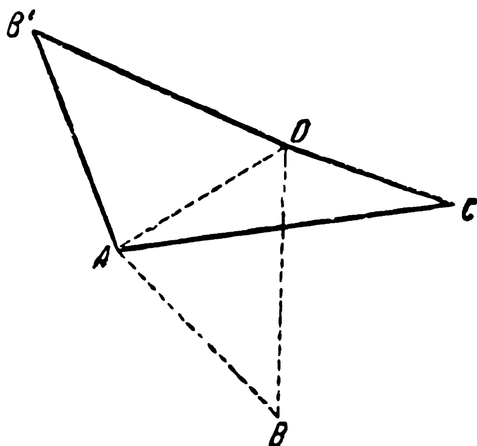


Рис. 35

Вдумчивый читатель тотчас же заметит слабое место в наших рассуждениях. Ведь линия *ABDC* может служить границей не только для куска, составленного из треугольников *ABC* и *BDC*, но и для многих других кусков, составленных совсем иначе. Можно, например, взять четырехугольник

$AB'DC$ (рис. 35) и перегнуть его по диагонали AD, тогда четырехугольник $ABDC$ окажется составленным из треугольников ABD и DCA. Площадь четырехугольника должна равняться сумме площадей треугольников ABD и DCA. Возникает вопрос, будет ли эта сумма равна тем же 1.7 см²? Ведь если окажется, что она равняется какому-либо другому числу, то это будет означать, что наше определение площади четырехугольника неудачно, так как не может площадь одного и того же четырехугольника равняться двум различным числам.

Это слабое место не трудно укрепить. Вернемся вновь к рис. 33. Треугольник ABC состоит из треугольников ABE и BCE, а треугольник BDC из треугольников BEC и EDC; следовательно,

$$\text{площадь } ABC = \text{площадь } ABE + \text{площадь } BCE,$$
$$\text{площадь } BDC = \text{площадь } BEC + \text{площадь } EDC;$$
$$\text{площадь } ABDC = \text{площадь } ABC + \text{площадь } BDC = \\ = \text{площадь } ABE + \text{площадь } BCE + \text{площадь } BEC + \\ + \text{площадь } EDC.$$

Но треугольники BCE и BEC отличаются только направлением обхода их сторон; значит, их площади отличаются только знаками; поэтому сумма этих площадей должна быть равна нулю. Иначе говоря, в предыдущем равенстве два средних члена уничтожают друг друга и мы получаем:

$$\text{площадь } ABDC = \text{площади } ABE + \text{площадь } EDC \quad (1)$$

(не следует забывать, что в правой части стоит алге-

браическая сумма, первый член которой положителен, а второй — отрицателен).

Если же мы будем рассматривать четырехугольник $ABDC$ как составленный из треугольников ABD и DCA, то получим:

площадь ABD = площадь ABE + площадь EDA,
площадь DCA = площадь EAD + площадь EDC;
площадь $ABDC$ = площадь ABD + площадь DCA =
= площадь ABE + площадь EDA +
+ площадь EAD + площадь EDC.

Но

площадь EDA + площадь EAD = 0,

так что

площадь $ABDC$ = площадь ABE + площадь EDC. (2)

Сравнивая равенства (1) и (2), мы видим, что правые части их одинаковы, и, следовательно, площадь четырехугольника в обоих случаях выражается одним и тем же числом.

Итак, площадь четырехугольника не зависит от того, из каких треугольников он составляется. С новой, алгебраической точки зрения площадь четырехугольника зависит только от формы и размера его границы и вовсе не зависит от того, какую форму и размер имеет кусок, ограниченный этой границей.

Мебиус подошел к определению площади четырехугольника несколько иначе. Постараемся показать на примере, как он это делал.

Возьмем на плоскости произвольную точку O и соединим ее со всеми вершинами четырехугольника $ABDC$ (рис. 36). Тогда этот четырехугольник можно рассматривать как составленный из четырех треугольников: ABO, BDO, DCO и CAO, причем направление обхода каждого из них определяется направлением той стороны четырехугольника, которая входит в данный треугольник. В таком случае границей куска, составленного из этих треугольников, является линия $ABDC$, так как OB, OA, OD и OC служат линиями, по которым приклеиваются друг к другу треугольники, составляющие наш четырехугольник, и потому не входят в границу. Площадь четырехугольника придется рассматривать как алгебраическую сумму площадей четырех треугольников; при этом площади треугольников ABO и CAO следует считать положительными, а площади треугольников BDO и DCO — отрицательными.

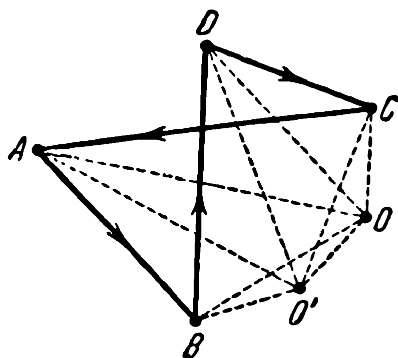


Рис. 36

Не трудно показать, что при таком определении площади результат не зависит от выбора точки O. В самом деле, возьмем, кроме точки O, еще точку O' и будем определять площадь четырехугольника $ABDC$ с помощью обеих этих точек. В первом случае

площадь $ABDC$=площадь ABO+площадь BDO+ + площадь DCO+площадь CAO.

К правой части этого равенства прибавим сумму площадь $O'AO$+площадь $AO'O$+площадь $O'BO$+ +площадь $BO'O$+площадь $O'DO$+ площадь $DO'O$+ +площадь $O'CO$+площадь $CO'O$; эта сумма равна нулю, потому что каждая пара соседних слагаемых (например, площадь $O'AO$ и площадь $AO'O$) численно равны, но имеют противоположные знаки (это — площади одного и того же треугольника, но взятые при различном направлении обхода его границы). Поэтому от прибавления указанной суммы величина правой части предыдущего равенства не изменяется. Теперь мы можем переписать это равенство так:

площадь $ABDC$=(площадь ABO+площадь $BO'O$+ +площадь $O'AO$)+(площадь BDO+площадь $DO'O$+ +площадь $O'BO$)+(площадь DCO+площадь $CO'O$+ +площадь $O'DO$)+(площадь CAO+площадь $AO'O$+ +площадь $O'CO$).

Сумма в первой скобке равна площади треугольника ABO'; во второй скобке — площади треугольника BDO'; в третьей скобке — площади треугольника DCO' и в четвертой — площади треугольника CAO'. Таким образом получаем:

площадь $ABDC$=площадь ABO'+площадь BDO'+ +площадь DCO'+площадь CAO'.

Это равенство показывает, что площадь четырехугольника может быть определена также и с помощью точки O'.

Легко видеть, что способ Мебиуса по существу не отличается от вышеописанного способа опреде-

ления площадей многоугольников; разница заключается лишь в том, что при способе Мебиуса приходится брать не какой-угодно кусок, ограниченный данным многоугольником, а кусок специального вида.

Все, что мы говорили о площади четырехугольника, относится и к площади любого многоугольника. Возьмем, например, произвольную точку O на плоскости и соединим ее со всеми вершинами семиугольника $ABCDEFG$ (рис. 37). Тогда площадь семиугольника можно определить как сумму площадей семи треугольников ABO, BCO, CDO, DEO, EFO, FGO и GAO. При этом можно было бы опять показать, что данная сумма зависит только от величины, формы и направления обхода линии $ABCDEFG$ и вовсе не зависит от того, где взята точка O.

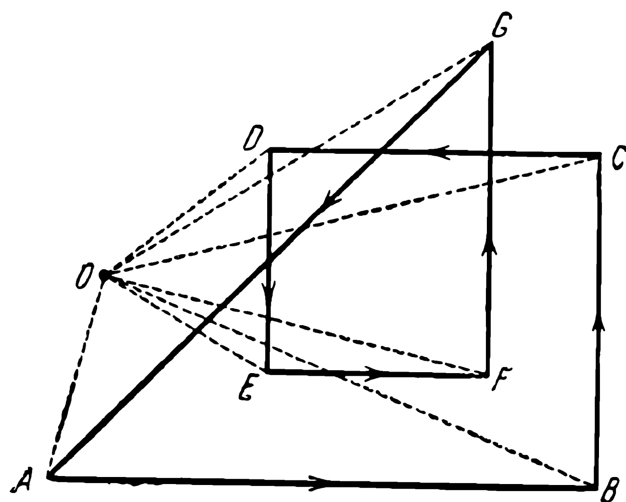


Рис. 37

Рассмотренные выше определения площади многоугольника наводят нас на мысль, что если мы возьмем в пространстве какую-нибудь поверхность, ограниченную ломаной линией, и расплющим ее на плоскость так, чтобы ломаная линия приняла форму

многоугольника, а поверхность превратилась бы в кусок, лежащий в той же плоскости, быть может, согнутый много раз, и ограниченный этим многоугольником, то площадь многоугольника будет равна (алгебраической) сумме площадей отдельных частей, из которых состоит полученный кусок. Эта мысль в основном верна, но нуждается все же в оговорках, о которых придется сказать несколько слов.

Для того, чтобы можно было определить площадь многоугольника, необходимо, чтобы каждая часть ограниченного им куска имела две стороны — положительную и отрицательную (красную и синюю); при этом две смежных части, соединенные по линии сгиба, должны быть обращены к нам сторонами разного цвета, а смежные части, общая граница которых не служит линией сгиба, — сторонами одного цвета. Между тем (как это ни кажется удивительным на первый взгляд) возможны такие поверхности, которые имеют только одну сторону, и у которых поэтому нельзя закрасить одну сторону в один цвет, а другую — в другой. Для ясности приведем пример такой односторонней поверхности.

Возьмем длинный и узкий прямоугольный кусок бумаги (рис. 38a) *abcd*, свернем его в кольцо, и повернув один конец на 180°, склеим концы. Тогда получим кольцо такого вида, как показано на рис. 38b. Края *ab* и *cd* нашей полосы, как видно на этом рисунке, склеены так, что точка *a* совпадает с точкой *c*, а точка *b* с точкой *d*. Попробуем те-

перь одну сторону полученного кольца окрасить хотя бы в красный цвет (советуем читателю проделать это самому, так как только в этом случае он действительно поймет то, о чем мы сейчас будем говорить). Начав закраску с какого-либо места кольца и постепенно расширяя закрашенную область, мы незаметно перейдем «на другую сторону» кольца и закрасим ее полностью. Иначе говоря, между

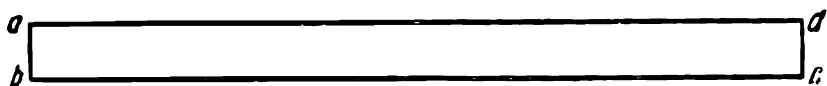


Рис. 38а

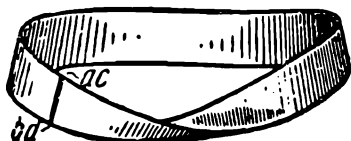


Рис. 38b

«левой» и «правой» сторонами кольца нет никакой границы, они постепенно переходят одна в другую, т. е. поверхность имеет только одну сторону.

Эта односторонняя поверхность носит название кольца или пояса Мебиуса. Если кольцо Мебиуса расплющить на плоскость хотя бы так, как это показано на рис. 39, то граница его примет форму многоугольника $MNPQRS$, а само кольцо превратится в плоский кусок, ограниченный линией $MNPQRS$. Этот кусок не дает возможности определить площадь многоугольника $MNPQRS$: ведь, он имеет только одну сторону, а потому нельзя установить, какие знаки следует приписать тем отдельным частям, из которых состоит этот кусок.

Можно еще иначе пояснить, почему расплющенное кольцо Мебиуса, составленное из трапеций *MNRQ*, *RNPS*, *PSMQ*, не дает возможности определить площадь многоугольника *MNPQRS*. Для этого придадим многоугольнику *MNPQRS* определенное направление обхода его границы, хотя бы такое, какое показано стрелками на рис. 39. Попробуем теперь установить соответствующее направление обхода отдельных частей, составляющих наш кусок. Напомним, что на границе каждой части должно быть выбрано такое направление обхода, при котором стороны многоугольника, входящие в границу этой части, обходятся в том же направлении, что и в самом многоугольнике.

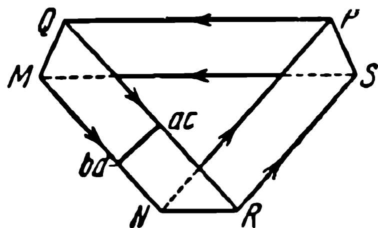


Рис. 39

Трапеция *MNRQ* составляет одну из частей нашего куска. Если границу этой трапеции пройти в направлении *MNRQ* (т. е. сначала пройти сторону *MN* от *M* к *N*, сторону *NR* от *N* к *R*, сторону *RQ* от *R* к *Q* и, наконец, сторону *QM* от *Q* к *M*), то сторона *RQ* будет пройдена в направлении, противоположном тому, какое она имела в многоугольнике *MNPQRS*. Значит, это направление обхода трапеции не пригодно для определения площади нашей фигуры. Если же пройти границу той же трапеции в направлении *MQRN*, то сторона *NM* будет пройдена в направлении от *N* к *M*, т. е. в направлении, противоположном тому, в каком она проходится

в многоугольнике $MNPQRS$. Значит, и это направление обхода границы трапеции не годится для определения площади многоугольника. Таким образом, нельзя выбрать никакого направления обхода трапеции $MNRQ$, которое годилось бы для определения площади многоугольника $MNPQRS$. То же самое можно сказать и о других трапециях, составляющих наш кусок.

Все сказанное приводит нас к такому окончательному выводу: если мы хотим определить площадь произвольного (звездчатого) многоугольника, имеющего определенное направление обхода его границы, то нужно натянуть на этот многоугольник двусторонний плоский кусок и определить площади отдельных его частей; алгебраическая сумма площадей этих частей даст площадь нашего многоугольника.

Задачи ко второй главе

1. Окружность разделена на пять равных частей. Сколько можно построить различных правильных пятиугольников,[1] имеющих вершины в точках деления?

2. Показать, что при продолжении сторон обыкновенного, правильного пятиугольника до их взаимного пересечения получается правильный звездчатый пятиугольник.

3. Можно ли тем же приемом из обыкновенного правильного восьмиугольника получить звездчатый правильный восьмиугольник.

4. Показать, что не существует ни одного звездчатого правильного шестиугольника.

---

[1] Правильным пятиугольником называется пятиугольник, все стороны и все углы которого равны между собой.

5. Показать, что площадь антипараллелограма[1] равна нулю.

6. Чему равна площадь восьмиугольника, граница которого состоит из дважды пройденной в положительном направлении границы квадрата со стороной в 1 см (т. е. восьмиугольника *ABCDABCD*, где *A*, *B*, *C*, *D* — последовательные вершины квадрата).

7. Плоский кусок ограничен двумя квадратами: большим со стороной в 10 см и маленьким со стороной в 6 см. Определить площадь этого куска: a) если граница большого квадрата обходится в положительном направлении, а малого в отрицательном; b) если оба квадрата обходятся в положительном направлении; c) зависит ли в обоих случаях величина площади куска от расположения квадратов.

---

[1] Антипараллелограмом называется четырехугольник, две противоположные стороны которого равны, параллельны и одинаково направлены, а две другие пересекаются,

Глава третья

ПЛОЩАДИ, ОГРАНИЧЕННЫЕ КРИВЫМИ ЛИНИЯМИ, И ДЛИНЫ КРИВЫХ ЛИНИЙ

Определение площадей, ограниченных кривыми линиями, существенным образом отличается от определения площадей многоугольников. Ведь, площадь, ограниченную кривой, никак нельзя разбить на треугольники или составить из треугольников. Поэтому, казалось бы, та теория площадей, которую мы построили в двух первых главах, не может быть распространена на фигуры, ограниченные кривыми линиями. Но в действительности это не так. С помощью «принципа предельного перехода», к изложению которого мы сейчас перейдем, вся теория площадей, построенная ранее, применима и в этом случае.

На рис. 40 изображена замкнутая кривая линия. Разобьем ее на маленькие части точками 1, 2, 3,..., 14. У нас на чертеже взято четырнадцать точек деления, причем одиннадцатая точка совпадает с первой (здесь находится «двойная точка» кривой, т. е. точка ее самопересечения). Можно было бы взять и больше: двадцать, тридцать, вообще сколько угодно точек. Соединив их в последовательном порядке прямыми линиями, мы получим многоугольник 123... Если

точек на кривой взято много и расположены они близко одна от другой, то полученный многоугольник будет почти вплотную прилегать к кривой линии, и его площадь будет мало отличаться от площади, ограниченной этой кривой.

В самом деле, как видно на рисунке, разность между указанными площадями равна сумме площадей заштрихованных частей, т. е. действительно очень мала.

Для того, чтобы разность между площадью, ограниченной кривой и площадью многоугольника стала еще меньше, нужно разбить кривую на более мелкие части и, следовательно, вписать в нее многоугольник с еще большим числом сторон. Новый многоугольник будет еще ближе прилегать к кривой и потому его площадь еще меньше будет отличаться от площади, ограниченной этой кривой.

Опишем теперь в общих чертах «принцип предельного перехода». Представим себе, что в кривую вписывают все новые и новые многоугольники, причем при переходе от одного многоугольника к другому увеличивают число сторон многоугольника, уменьшая все его стороны. Тогда, конечно, площади всех этих многоугольников будут различны. При этом площадь второго многоугольника будет ближе к площади кривой, чем площадь первого, так как второй многоугольник плотнее прилегает к кривой; точно так же площадь третьего многоугольника будет ближе к площади кривой, чем площадь второго и т. д.

Предположим теперь, что нам не известна площадь кривой, но известны площади бесконечного множества многоугольников, вписанных в эту кривую. Может случиться, что, проследив изменение площадей многоугольников, нам удастся установить, что по мере увеличения числа сторон площади многоугольников все более и более приближаются к некоторому определенному числу. Тогда это число и есть площадь кривой. В математике принято говорить в этом случае, что с увеличением числа сторон и с уменьшением самих сторон многоугольники стремятся к площади кривой как к пределу.

Конечно, сказанного о принципе предельного перехода далеко недостаточно для того, чтобы пользоваться им на практике. Чтобы освоиться с ним, необходимо разобрать много различных случаев его применения. Но в этой книжке мы не ставим себе таких широких целей. Для нашей цели достаточно будет рассмотреть два примера, важных как с практической, так и с теоретической и исторической точек зрения: это — вычисление площади круга и длины окружности.

Но прежде чем переходить к рассмотрению этих двух задач, вернемся еще раз к чертежу 40. Напомним, что если точки 1, 2, 3... расположены близко одна от другой и, следовательно, многоугольник почти совпадает с кривой, то и его длина (периметр) почти равна длине кривой. Если увеличивать число сторон вписанного в кривую многоугольника, уменьшая одновременно самые стороны, то периметр много-

угольника будет изменяться. Если при этом окажется, что периметры многоугольников постепенно приближаются к некоторому определенному числу, то, очевидно, это число и есть длина нашей кривой.

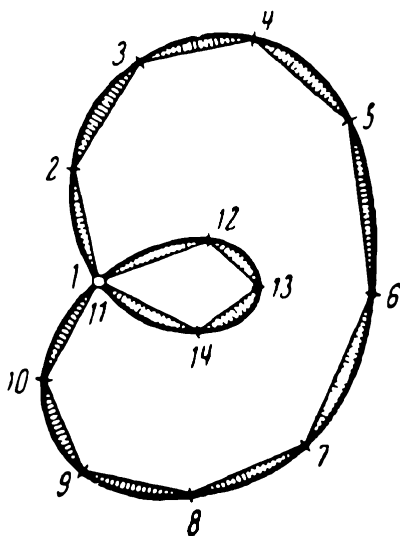


Рис. 40

Таким образом, длина кривой есть предел периметров многоугольников, вписанных в кривую, получаемый при неограниченном увеличении числа сторон и уменьшении самих сторон многоугольника.

Следовательно, один и тот же процесс увеличения числа сторон и уменьшения самих сторон многоугольника позволяет определить и площадь и длину кривой. Поэтому эти две задачи мы большей частью будем рассматривать одновременно.

После этих предварительных замечаний мы можем перейти к определению площади круга и длины окружности.

Сравним сначала два круга с разными радиусами. Допустим, что они расположены концентрически, т. е. их центры совпадают. Для определенности будем считать, что радиус одного круга в два раза больше, чем радиус другого.

Впишем в большую окружность правильный шестиугольник (рис. 41) и соединим его вершины с центром прямыми линиями. Тогда точки пересечения этих линий с малой окружностью будут вер-

шинами другого шестиугольника, вписанного в малую окружность. Очевидно, каждая сторона большого шестиугольника в два раза больше каждой стороны малого, а потому и периметр его тоже в два раза больше.

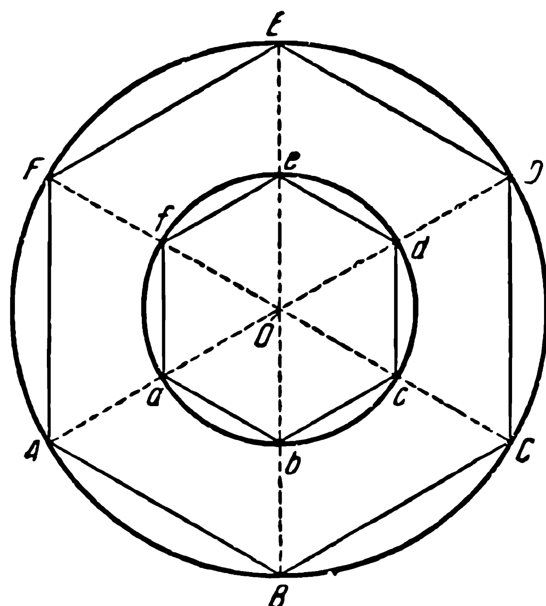


Рис. 41

Если вместо шестиугольников мы таким же образом впишем в оба круга правильные двенадцатиугольники, то так же убедимся, что периметр двенадцатиугольника, вписанного в большую окружность, будет в два раза больше, чем периметр двенадцатиугольника, вписанного в малую окружность. Точно так же можно убедиться, что периметр правильного двадцатичетырехугольника, вписанного в большую окружность, в два раза больше периметра правильного двадцатичетырехугольника, вписанного в малую окружность и т. д.

Вообще, какой бы правильный многоугольник мы ни вписали в большую окружность, его периметр будет вдвое больше периметра правильного многоугольника с тем же числом сторон, вписанного в малую окружность. По мере возрастания числа сторон периметры многоугольников, вписанных в

большую окружность, приближаются к длине этой последней; точно так же по мере возрастания числа сторон периметры многоугольников, вписанных в малую окружность, приближаются к длине этой окружности; но периметры больших многоугольников все время вдвое больше, чем периметры малых, значит и предел, к которому приближаются периметры больших многоугольников, должен быть вдвое больше, чем предел, к которому приближаются периметры малых; иначе говоря, большая окружность должна быть вдвое длиннее малой.

Если бы радиус большой окружности был не в два, а в три раза больше, чем радиус малой, то, рассуждая совершенно таким же образом, мы убедились бы, что и длина большой окружности была бы в три раза больше, чем малой. Вообще, если радиус одного круга в несколько раз больше, чем радиус другого, то и окружность первого круга во столько же раз больше, чем окружность второго.

Для нас важен собственно не этот факт, а одно следствие, которое из него вытекает. Предположим, например, что длина какой-либо окружности в π раз больше, чем ее диаметр (здесь греческая буква «пи» — — π — обозначает какое-то, пока неизвестное нам число) и, следовательно в 2π раз больше, чем его радиус. Если мы увеличим или уменьшим радиус в несколько раз, то, как мы видели, и окружность увеличится или уменьшится во столько же раз и, следовательно, длина новой, измененной окружности будет опять в π раз больше ее диаметра. Это замечательное

предложение можно высказать еще так: отношение длины окружности к диаметру есть величина постоянная.

Если бы нам было известно это число π, выражающее отношение длины окружности к диаметру, то определение длины окружности не составляло бы никакого труда: достаточно было бы для этого умножить длину диаметра на π. К сожалению, мы пока не знаем этого числа; ближайшая наша задача и будет состоять в его вычислении.

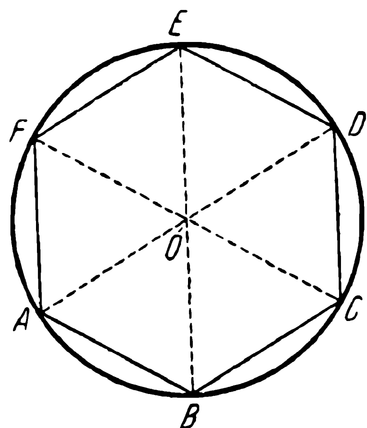


Рис. 42

Вернемся вновь к правильному шестиугольнику, вписанному в окружность (рис. 42). Не трудно убедиться, что сторона этого шестиугольника равна радиусу окружности. Ведь если мы соединим центр окружности прямыми линиями со всеми вершинами шестиугольника, то центр окружности окажется вершиной шести равных углов, образованных этими линиями. Так как углы, полностью заполняющие плоскость вокруг какой-либо точки, составляют 360°, то каждый из наших углов должен равняться 60°.

Обратимся теперь к одному из тех шести треугольников, на которые разделился наш шестиугольник. Так как угол, вершиной которого служит центр окружности, составляет 60° и так как сумма трех углов треугольника всегда равна 180°, то на долю двух

других углов приходится 120°. Но легко заметить, что последние два угла равны; следовательно, каждый из них содержит 60°. Итак, каждый угол треугольника содержит 60°. Это возможно только в том случае, если все три стороны треугольника равны между собой. Но две стороны нашего треугольника являются радиусами окружности; значит, третья сторона, которая в то же время является стороной шестиугольника, равна радиусу окружности. Таким образом, сторона правильного, вписанного в окружность шестиугольника, равна радиусу этой окружности.

Заметим теперь (рис. 42), что граница правильного шестиугольника довольно близко прилегает к окружности; поэтому, взяв вместо длины окружности периметр вписанного шестиугольника, мы сделаем не очень большую ошибку. Разделив периметр шестиугольника на диаметр круга, мы получим приближенное значение для числа π, которое будет несколько меньше истинного, так как периметр шестиугольника несколько меньше длины окружности.

Мы только что определили, что сторона правильного вписанного в окружность шестиугольника равна радиусу окружности; следовательно, периметр шестиугольника равен шести радиусам. Но диаметр круга равен двум радиусам; значит, отношение периметра шестиугольника к диаметру равно 3. Отсюда можно заключить, что π приблизительно равно 3. Это значение π еще не точно; истинное значение π несколько больше этого, но даже это неточное значение числа π бывает иногда полезно.

Перейдем теперь к более точному вычислению числа π; к сожалению, здесь потребуются от читателя несколько большие знания из алгебры, чем в других местах этой книжки; но, пожалуй, если читатель имеет под рукой таблицу квадратных корней и помнит теорему Пифагора, о которой говорилось в первой главе, то нам удастся провести его без особых недоразумений и через эти трудности.

Более точное значение π мы будем вычислять так же, как и в предыдущем случае, только вместо шестиугольника нам придется брать многоугольники с большим числом сторон. Так как, по мере увеличения числа сторон, периметры правильных вписанных многоугольников постепенно приближаются к окружности, то вычисление π указанным способом будет тем точнее, чем больше сторон имеет многоугольник. Мы будем, постепенно удваивая число сторон многоугольника, переходить от шестиугольника к двенадцатиугольнику, а затем к двадцатичетырехугольнику, к сорокавосьмиугольнику, и, наконец, к девяностошестиугольнику. Таким образом, мы будем получать последовательно все более и более точные значения π.

Чтобы получить правильный вписанный двенадцатиугольник, разделим пополам каждую дугу окружности, заключенную между двумя соседними вершинами правильного вписанного шестиугольника; эти шесть точек деления вместе с шестью вершинами шестиугольника составят двенадцать

вершин правильного вписанного двенадцатиугольника (рис. 43).

Пусть A_1, A_2, A_3 — три последовательных вершины двенадцатиугольника. Прямая OA_2 делит пополам сторону A_1A_3 шестиугольника; следовательно, линия A_1K равна половине радиуса окружности: $A_1K = \frac{R}{2}$.

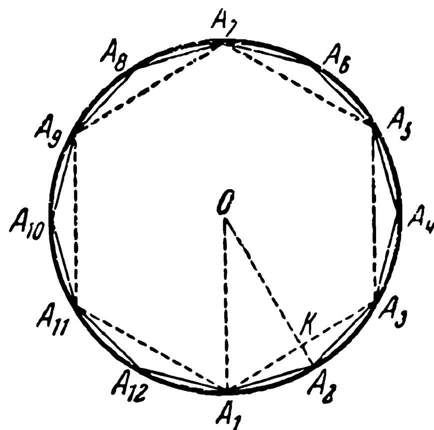


Рис. 43

Из прямоугольного треугольника A_1KO (прямой угол при вершине K) находим отрезок OK; для этого сначала находим его квадрат по теореме Пифагора:

$$OK^2 = OA_1^2 - A_1K^2 = R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4},$$

а затем, извлекая квадратный корень, находим и длину самого отрезка OK:

$$OK = \sqrt{\frac{3R^2}{4}} = \frac{1}{2} R \sqrt{3}.$$

$\sqrt{3}$ можно найти в таблицах квадратных корней; он равен 1.732051.

Следовательно,

$$OK = \frac{1}{2} R \cdot 1.732051 = 0.866026R.$$

Отрезок KA_2 мы получим, вычтя эту величину из радиуса круга:

$$KA_2 = R - 0.866026R = 0.133974R.$$

Сторону двенадцатиугольника находим теперь по теореме Пифагора из треугольника A_1KA_2 (прямой угол при K):

$$a_{12}^2 = A_1A_2^2 = A_1K^2 + KA_2^2 = (0.5R)^2 + (0.133974R)^2 =$$
$$= 0.25R^2 + 0.017948R^2 = 0.267948R^2,$$

откуда

$$a_{12} = A_1A_2 = 0.517636R.$$

Умножая эту величину на 12, получим периметр двенадцатиугольника: $0.517636R \cdot 12 = 6.211632R$. Разделив его на $2R$, находим новое, более точное значение π:

$$\pi = 6.211632R : 2R = 3.105816.$$

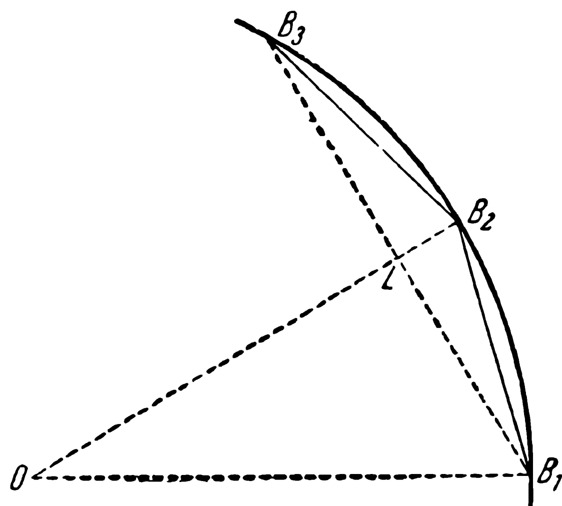


Рис. 44

Чтобы вычислить еще более точное значение π, перейдем к двадцатичетырехугольнику. Пусть B_1B_2 и B_2B_3 — стороны правильного двадцатичетырехугольника, вписанного в окружность (рис. 44 [1]); тогда B_1B_3 — сторона двенадцатиугольника, длина кото-

[1] Чертеж 44 выполнен без соблюдения истинных отношений между элементами чертежа, так как погоня за точностью чертежа привела бы к неудобной для обозрения величине дуг B_1B_2 и B_2B_3.

рой нам уже известна. Соединяем точки B_1 и B_2 с центром круга O. Точка L — точка пересечения радиуса OB_2 с хордой B_1B_3 — делит сторону B_1B_3 пополам. Поэтому $B_1L = \frac{1}{2}\ a_{12} = 0.5 \cdot 0.517636R = 0.258818R$.

Из прямоугольного треугольника B_1LO (угол L прямой) находим:

$$OL^2 = OB_1^2 - B_1L^2 = R^2 - (0.258818R)^2 = \\ = R^2 - 0.066946R^2 = 0.933054R^2.$$

Извлекая отсюда квадратный корень, получаем:

$$OL = \sqrt{0.933054R^2} = 0.965957R.$$

Вычитая эту величину из радиуса круга, получим длину отрезка LB_2:

$$LB_2 = R - 0.965957R = 0.034043R.$$

Теперь из прямоугольного треугольника B_1LB_2 (угол L прямой) можно найти сторону двадцатичетырехугольника:

$$a_{24}^2 = B_1B_2^2 = B_1L^2 + B_2L^2 = \left(\frac{1}{2}a_{12}\right)^2 + B_2L^2 = \\ = \frac{1}{4} \cdot 0.267948R^2 + (0.034043R)^2 = \\ = 0.066987R^2 + 0.001159R^2 = 0.068146R^2.$$

Извлекая квадратный корень, получаем:

$$a_{24} = \sqrt{0.068146R^2} = 0{,}261047R.$$

Умножая эту величину на 24, находим периметр двадцатичетырехугольника

$$P_{24} = 24 \cdot 0.261047R = 6.265128R.$$

Разделив периметр двадцатичетырехугольника на диаметр круга, получим третье, еще более точное значение π:

$$\pi = 6.265128R : 2R = 3.13256.$$

Чтобы получить еще более точное значение π, перейдем к сорокавосьмиугольнику. Воспользуемся опять рис. 44, но на этот раз будем считать, что хорды B_1B_2 и B_2B_3 представляют собою стороны сорокавосьмиугольника, а B_1B_2 — сторону двадцатичетырехугольника. Подобно предыдущему будем иметь:

$$OL^2 = OB_1^2 - B_1L^2 = R^2 - \frac{1}{4} a_{24}^2 =$$

$$= R^2 - \frac{1}{4} \cdot 0.068146R^2 = R^2 - 0.017037R^2 =$$

$$= 0.982963R^2;$$

$$OL = \sqrt{0.982963R^2} = 0.991444R;$$

$$LB_2 = R - 0.991444R = 0.008556R;$$

$$a_{48}^2 = B_1B_2^2 = B_1L^2 + LB_2^2 = \frac{1}{4} a_{24}^2 + LB_2^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 0.068146R^2 + (0.008566R)^2 =$$

$$= 0.017037R^2 + 0.000073R^2 = 0.017110R^2;$$

$$a_{48} = \sqrt{0.017110R^2} = 0.130805R;$$

$$P_{48} = 48 \cdot 0.130805R = 6.278544R;$$

$$\pi = 6.278544R : 2R = 3.139272.$$

Перейдем теперь к девяностошестиугольнику. Воспользуемся снова рис. 44, только в этом случае хорды B_1B_2 и B_2B_3 будем считать сторонами девяностошестиугольника, а хорду B_1B_3 — стороной сорокавосьмиугольника. Будем иметь:

$$OL^2 = OB_1^2 - B_1L^2 = R^2 - \left(\frac{1}{2}a_{48}\right)^2 = R^2 - \frac{1}{4}a_{48}^2 =$$
$$= R^2 - \frac{1}{4}\cdot 0.017110R^2 = R^2 - 0.004277R^2 =$$
$$= 0.995723R^2.$$
$$OL = \sqrt{0.995723R^2} = 0.997859R.$$
$$B_2L = OB_2 - OL = R - 0.997859R = 0.002141R;$$
$$a_{96}^2 = B_1L^2 + LB_2^2 = \left(\frac{1}{2}a_{48}\right)^2 + LB_2^2 = \frac{1}{4}a_{48}^2 + LB_2^2 =$$
$$= \frac{1}{4}\cdot 0.017110R + (0.002141R)^2 =$$
$$= 0.004277R^2 + 0.000005R^2 = 0.004282R^2;$$
$$a_{96} = \sqrt{0.004282R^2} = 0.065437R;$$
$$P_{96} = 96\cdot 0.065437R = 6.281952R;$$
$$\pi = 6.271952R : 2R = 3.140976.$$

Так как это число выражает тоже только приближенное значение π, то возможно, что последние цифры этого числа неправильны. Чтобы установить, каково же все-таки число π, сравним все полученные значения для π. Выпишем их:

Шестиугольник	=3.
Двенадцатиугольник	=3.105816
Двадцатичетырехугольник	=3.132564
Сорокавосьмиугольник	=3.139272
Девяностошестиугольник	=3.140976

Как видим, по мере увеличения числа сторон многоугольника, вычисленные нами приближенные значения π постепенно возрастают, при этом сначала быстро, а затем все медленнее. Например, при переходе от шестиугольника к двенадцатиугольнику приближенное значение π возросло более чем на 0.1; при следующем переходе оно возросло менее, чем на 0.03; далее — менее, чем на 0.007 и, наконец, при переходе от сорокавосьмиугольника к девяностошестиугольнику — менее чем на 0.002. Чтобы определить истинное значение π, нужно установить, к какому числу будет стремиться полученный ряд чисел, если его продолжать и дальше, путем неограниченного удвоения числа сторон многоугольников. Хотя мы и не можем проделать этот бесконечный процесс неограниченного увеличения числа сторон многоугольника, но и теперь уже на основе нашей таблички можно судить о величине числа π. Так как при продолжении таблицы приближенные значения π будут возрастать еще медленнее, то, очевидно, дальше будут меняться только тысячные и другие более мелкие доли получаемых нами приближенных значений, а единицы, десятые и сотые доли меняться не будут. Это дает нам право высказать предположение, что π будет немного больше 3.14, т. е. оно будет больше 3.14 и меньше 3.15.

Что π больше 3.14, доказано предыдущими вычислениями; остается показать, что оно меньше 3.15. Для этого рассмотрим описанные около окружности многоугольники.

Пусть около окружности описан правильный многоугольник (на рисунке 45 шестиугольник $A_1A_2... A_6$). Если все углы этого многоугольника срезать при помощи касательных, как это показано на рисунке, то он превратится в другой правильный описанный многоугольник с вдвое большим числом сторон (многоугольник $B_1B_2... B_{12}$), периметр которого будет меньше периметра первоначального многоугольника, потому что каждая новая сторона, например, сторона B_2B_3, заменила собой некоторую ломаную линию (в нашем случае ломаную $B_2A_2B_3$), соединяющую ее концы. Как известно, прямая линия короче всякой другой линии, соединяющей те же точки.

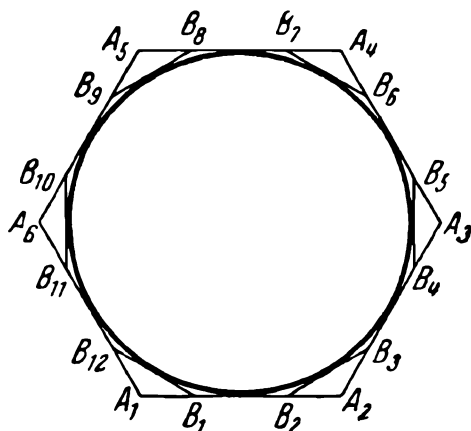


Рис. 45

Если мы опять начнем с правильного шестиугольника, но теперь уже описанного около окружности, и, постепенно удваивая число сторон, будем переходить к правильному описанному двенадцатиугольнику, а затем к такому же двадцатичетырехугольнику и так дальше, то периметры этих многоугольников, как мы только что убедились, будут уменьшаться, причем граница многоугольника еще больше приблизится к окружности, следовательно, пределом периметров описанных многоугольников будет снова длина окружности. Но приближаясь к длине

окружности, периметры описанных многоугольников уменьшаются, так что периметр всякого описанного многоугольника больше окружности. Поэтому, вычислив, например, длину правильного описанного сорокавосьмиугольника, мы получим число, немного превышающее длину окружности; разделив его на диаметр окружности, находим приближенное значение π, несколько большее истинного. Таким образом мы сможем установить, что число π меньше 3.15.

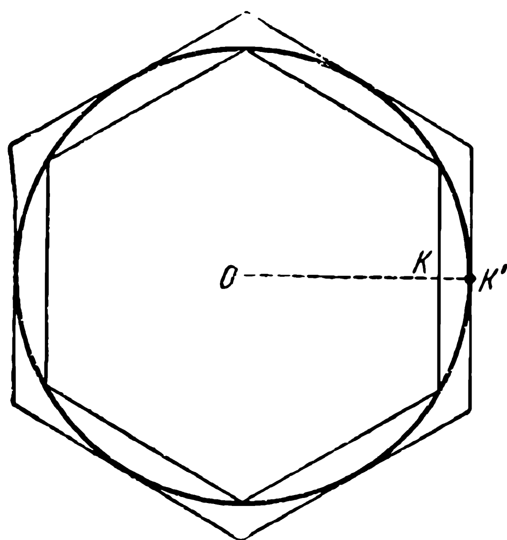


Рис. 46

Вычисление периметра описанного сорокавосьмиугольника значительно облегчается, если воспользоваться уже вычисленным периметром вписанного. Заметим, что описанный многоугольник мы можем получить из вписанного, несколько увеличив этот последний. Чтобы определить, во сколько раз мы должны его при этом увеличить, достаточно узнать, во сколько раз увеличится в данном случае какая-нибудь одна определенная линия многоугольника. Например, если нам известно, во сколько раз линия OK' больше линии OK (рис. 46), мы можем сказать, во сколько раз периметр описанного шестиугольника больше периметра вписанного шестиугольника. Оче-

видно, каждая сторона увеличивается во столько же раз, во сколько раз увеличивается линия OK, превращаясь в OK'; следовательно, и периметр описанного шестиугольника будет во столько же раз больше периметра вписанного шестиугольника.

То же самое можно повторить и для сорокавосьмиугольников. Длина линии OK вписанного сорокавосьмиугольника была нами вычислена на стр. 57; (там она обозначалась OL) она равна $0.997859R$. Линия OK' для всех описанных многоугольников одинакова — равна радиусу R. Разделив R на $0.997859R$, получим число 1.002145, которое показывает, во сколько раз периметр описанного сорокавосьмиугольника больше периметра вписанного сорокавосьмиугольника. Но периметр вписанного сорокавосьмиугольника был нами вычислен: он равен $6.278544R$. Умножив его на 1.002145, получим $6.292007R$ — периметр описанного сорокавосьмиугольника. Разделив это число на диаметр круга ($2R$), получим число 3.145004, которое должно быть, как мы видели, несколько больше π. Но если π меньше этого числа, то оно тем более меньше 3.15. Сравнивая этот результат с полученным ранее, приходим к выводу, что

$$3.14 < \pi < 3.15.$$

Описанный здесь способ для вычисления π в высшей степени громоздок. Ценой огромных усилий мы получили всего лишь три знака этого числа.

Вычисление дальнейших десятичных знаков потребовало бы еще большей затраты труда. Но наш труд не пропал даром: он помог нам выявить самую природу числа π и тот принцип предельного перехода, о котором мы говорили выше. Кроме того, наше вычисление π оправдывается и практическим значением последнего, ибо невозможно перечислить все случаи, когда приходится вычислять длину окружности или площадь круга, т. е. пользоваться результатами только что проделанной нами работы.

Более точные вычисления дают для π значение 3.14159. На практике очень удобно значение $\pi = \frac{22}{7}$. Оно несколько точнее, чем 3.14, но менее точно, чем 3.14159.

Познакомившись с вычислением длины окружности, мы легко можем понять, как вычисляется площадь круга. Соединив его центр с вершинами правильного описанного многоугольника, мы разобьем этот последний на треугольники, каждый из которых будет иметь своим основанием сторону многоугольника, а высотой — радиус круга. Таким образом, каждый такой треугольник равновелик прямоугольнику, основание которого равно стороне многоугольника, а высота — половине радиуса круга. Если мы положим рядом столько таких прямоугольников, сколько сторон имеет многоугольник, то получим длинный прямоугольник, площадь которого равна площади многоугольника. Но основание этого прямоугольника равно, очевидно, периметру

многоугольника, а высота — половине радиуса круга. Таким образом, площадь описанного многоугольника равна его периметру, умноженному на половину радиуса круга.

Если мы начнем удваивать число сторон описанного многоугольника, площадь его будет приближаться к площади круга, а периметр (а также и основание длинного прямоугольника) — к длине окружности. Отсюда мы делаем вывод, что в пределе площадь длинного прямоугольника будет равна площади круга. Но основание его будет равно длине окружности, а высота — половине радиуса. Следовательно, площадь круга равна длине окружности, умноженной на половину радиуса. Это правило можно записать формулой:

$$S = \frac{1}{2} C \cdot R.$$

Здесь S — площадь круга, R — его радиус, а C — длина окружности. Заметив, что $C = 2\pi R$, можем переписать эту формулу так:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2.$$

или

$$S = \pi R^2$$

Последней формулой обычно и пользуются.

Итак, площадь круга равна квадрату его радиуса, умноженному на π.

Задачи к третьей главе

1. В высшей математике доказывается, что π можно вычислить по формуле:

$$\pi = 16\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\dots\right]-4\left[\frac{1}{239}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3+\dots\right]$$

Каждая квадратная скобка в правой части равенства содержит бесконечно много членов. Для приближенного вычисления π берут в каждой из этих скобок несколько первых членов. Вычислите π, взяв в первой из квадратных скобок два первых члена, а во второй — один член.

Глава четвертая

МНОГОГРАННИКИ

Как на плоскости мы различали обыкновенные и звездчатые многоугольники, так и в пространстве можно рассматривать обыкновенные и зведчатые многогранники. Примерами обыкновенных много-

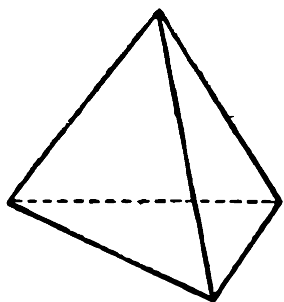


Рис. 47

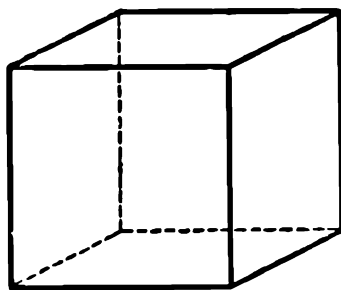


Рис. 48

гранников могут служить тетраэдр (его называют чаще треугольной пирамидой — рис. 47), куб (рис. 48), параллелепипед (рис. 49), треугольная призма (рис. 50) и т. д. Все эти тела ограничены плоскими кусками (гранями), которые являются обыкновенными многоугольниками. Грани прилегают друг к другу по прямым линиям (ребра многогранника); концы, которыми ребра упираются друг в друга, называются вершинами многогранника.

Грани обыкновенного многогранника не пересекают друг друга; такой многогранник разбивает пространство на две части: одна часть составляет внутренность многогранника, а другая лежит вне его и бесконечно простирается во все стороны.

Звездчатые многогранники обладают многими необычными свойствами. Различают два вида этих многогранников. У некоторых из них грани — обыкновенные многоугольники, пересекающие друг друга, у других — звездчатые. Могут быть и такие многогранники, у которых одни грани — звездчатые многоугольники, а другие — обыкновенные.

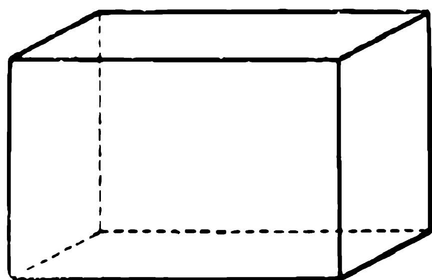


Рис. 49

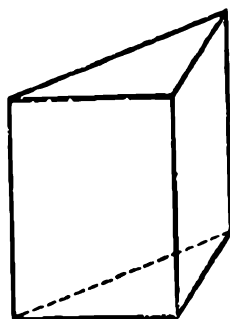


Рис. 50

Приведем несколько примеров звездчатых многогранников. Возьмем куб и на его нижнее основание поставим правильную четырехугольную пирамиду. Допустим, что ее основание совпадает с нижним основанием куба, а высота больше ребра куба. Выбросим нижние основания куба и пирамиды. Тогда оставшиеся грани куба и боковые грани пирамиды вместе составят многогранник, расположенный

в пространстве с самопересечениями (рис. 51). Этот многогранник будет иметь девять граней: *EFGH* — бывшее верхнее основание куба; *ABFE*, *BCGF*, *CDHG* и *DAEH* — бывшие боковые грани куба; *ABI*, *BCI*, *CDI*, *DAI* — бывшие боковые грани пирамиды. Рассматриваемый девятигранник имеет линию самопересечения *mnpq*; при этом прямые *mn*, *np*, *pq*, *qm*, составляющие линию самопересечения, отнюдь не являются ребрами многогранника, так как они не служат сторонами ни одного из многоугольников, ограничивающих многогранник.

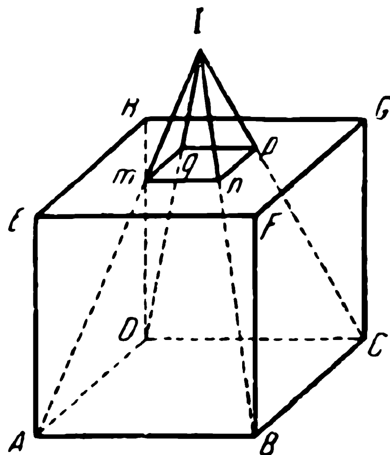


Рис. 51

Девятигранник, изображенный на рис. 51, есть двусторонняя поверхность. Чтобы в этом убедиться, представим себе, что внешняя поверхность куба и внутренняя поверхность пирамиды выкрашены красной краской, а внутренняя поверхность куба и внешняя поверхность пирамиды — синей краской. После того как мы выбросили нижние основания куба и пирамиды и получили таким образом девятигранную поверхность, мы можем беспрепятственно переходить с красной стороны одной грани на красную сторону другой грани точно так же, как и с синей стороны грани на синюю же сторону, но при этом мы не можем переходить с красной стороны

одной грани на синюю сторону другой грани и, наоборот, с синей стороны на красную. Это и значит, что восьмигранник имеет две стороны — красную и синюю.

Необходимо указать, как мы должны двигаться при переходе через линию самопересечения поверхности. Мы всегда будем предполагать, что, перейдя через эту линию, мы двигаемся по той же грани и ни в коем случае не переходим на другую. Это ограничение необходимо ввести для того, чтобы можно было различать две стороны многогранника. Оно не содержит в себе ничего искусственного, ведь мы считаем, что пересекающиеся грани никак не соединены по линии их пересечения.

Нужно отметить, что среди звездчатых многогранников, помимо двусторонних, имеются и односторонние. При этом не следует думать, что односторонние многогранники непременно должны иметь границу, как это было у поверхности Мебиуса. Могут быть и замкнутые, т. е. не имеющие границы односторонние многогранники; у таких многогранников к каждому ребру примыкают в точности две грани. Простейшим примером одностороннего замкнутого многогранника может служить так называемый гептаэдр (семигранник). Мы сейчас объясним, как устроен этот замечательный многогранник.

Возьмем две совершенно одинаковые четырехугольные правильные пирамиды и приложим их друг к другу основаниями. Боковые грани этих двух пирамид составят новый многогранник, имею-

щий восемь треугольных граней — так называемый октаэдр. Для большей ясности перечислим грани октаэдра, пользуясь рис. 52: *ABE*, *BCE*, *CDE*, *DAE*, *ABF*, *BCF*, *CDF*, *DAF*. Для построения гептаэдра нам понадобятся четыре из этих восьми граней, а именно *ABE*, *CDE*, *BCF* и *DAF*.

Чтобы получить гептаэдр, добавим к этим четырем треугольным граням еще три четырехугольных грани *ABCD*, *BFDE*, *AFCE*; вместе эти семь граней и образуют гептаэдр.

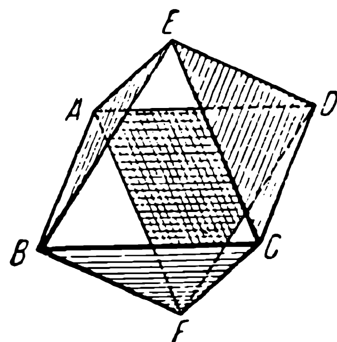


Рис. 52

Чтобы убедиться, что гептаэдр замкнут, нужно проследить за тем, чтобы к каждому ребру прилегали в точности две грани; ребро, к которому примыкает только одна грань, должно лежать на краю поверхности, т. е. входить в ее границу, так что поверхность, имеющая такое ребро, ни в коем случае не может быть замкнутой. Проверка подтверждает, что гептаэдр есть замкнутая поверхность. В самом деле, к ребру *AE* примыкают грани *ABE* и *AFCE*, к ребру *BE* — грани *ABE* и *BFDE* и т. д. Чтобы облегчить проверку, приводим табличку, в левом столбце которой перечислены все ребра гептаэдра, а в верхней строке — все его грани; если грань примыкает к ребру, то на пересечении столбца и строки, в которых записаны названия этих грани и ребра, мы ставим единицу; если же рассматриваемая грань

не примыкает к этому ребру, то на пересечении их столбца и строки мы ставим нуль (табл. 1).

Таблица 1

Ребра \ Грани	ABE	CDE	BCF	DAF	ABCD	BFDE	AFCE
AE	1	0	0	0	0	0	1
BE	1	0	0	0	0	1	0
CE	0	1	0	0	0	0	1
DE	0	1	0	0	0	1	0
AF	0	0	0	1	0	0	1
BF	0	0	1	0	0	1	0
CF	0	0	1	0	0	0	1
DF	0	0	0	1	0	1	0
AB	1	0	0	0	1	0	0
BC	0	0	1	0	1	0	0
CD	0	1	0	0	1	0	0
DA	0	0	0	1	1	0	0

В каждой строке оказалось по две единицы; это значит, что каждое ребро принадлежит сразу двум граням. Итак, гептаэдр замкнут.

AC, *BD* и *EF* есть линии самопересечения гептаэдра, но они не служат его ребрами, так как не являются сторонами многоугольников, составляющих гептаэдр.

Чтобы убедиться, что гептаэдр есть односторонняя поверхность, нужно показать, что, двигаясь непре-

рывно по гептаэдру, можно с одной стороны какой-либо грани перейти на другую сторону той же грани. Такое путешествие показано на рис. 53.

Отправным пунктом служит точка M, лежащая на грани $ABCD$ на верхней ее стороне. Из точки M мы идем по прямой MN до ребра BC, очевидно, все время по верхней стороне грани $ABCD$. Переходя через ребро BC, мы переваливаем с грани $ABCD$ на грань BCF, но так как проходить сквозь поверхность мы не имеем права, то мы попадем на переднюю сторону грани BCF. Следуя по ней вдоль линии NP, мы достигаем ребра CF, переваливаем через него и попадаем на заднюю сторону грани $AFCE$. Далее, двигаясь по задней стороне этой грани, мы достигаем точки Q, где переходим на переднюю сторону грани ADF. Наконец, в точке R мы переходим с передней стороны грани ADF на нижнюю сторону грани $ABCD$, идя по которой достигаем точки S, лежащей на нижней стороне грани $ABCD$. Но M и S — две точки, лежащие на разных сторонах грани $ABCD$; следовательно, следуя вдоль линии $MNPQRS$, мы перешли с одной стороны грани $ABCD$ на другую; этим и доказывается односторонность гептаэдра.

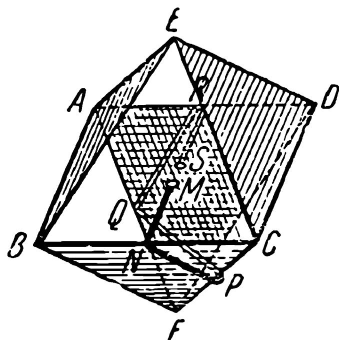


Рис. 53

То же самое путешествие можно представить себе еще более наглядно, если разрезать гептаэдр по ребрам AF, AE, BF, CE, DE и DF, разогнуть его и по-

ложить на плоскость. Такая «выкройка» гептаэдра изображена на рис. 54. Представим себе, что точка M находится на стороне, обращенной к читателю. Очевидно, на той же стороне лежит весь путь $MNPQ$.

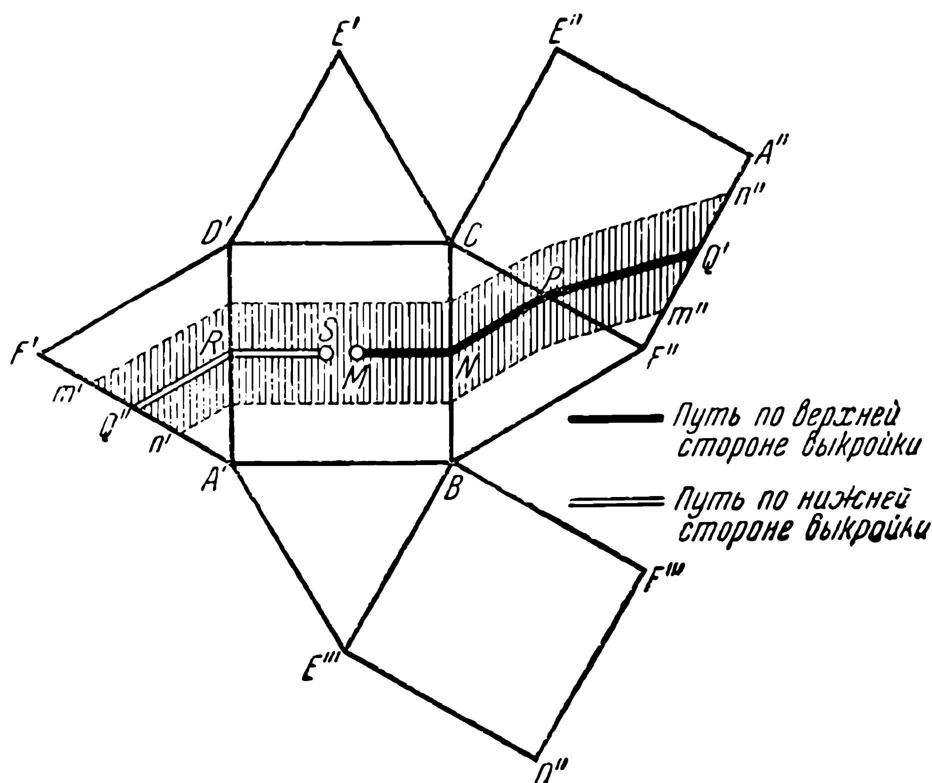


Рис. 54

Так как разрез прошел через точку Q, то на выкройке она представлена двумя своими «половинами»: Q' и Q''. Дальше путь проходит в треугольнике $A'F'D'$. Вторая «половина» Q'' точки Q лежит на границе треугольника $A'F'D'$; продолжение пути должно начинаться с этой точки. Но (здесь лежит центральный пункт нашего рассмотрения!) продолжение пути $Q''RS$ должно оказаться уже на другой стороне

выкройки. Ведь $F'A'$ и $F''A''$ прилегают друг к другу на гептаэдре так, что точка F' совпадает с точкой F'', а точка A' с точкой A''. Но при таком прилегании верхняя сторона треугольника $A'F'D'$ окажется продолжением нижней стороны квадрата $CF''A''E''$, а нижняя сторона — продолжением верхней. Таким образом, посредством непрерывного движения по гептаэдру можно из точки, лежащей на верхней стороне выкройки, дойти до точки, лежащей на нижней стороне выкройки. Это показывает, что верхняя и нижняя стороны выкройки до разрезания гептаэдра сливались в одну-единственную сторону гептаэдра. Итак, гептаэдр односторонен.

Этот факт можно сопоставить с односторонностью хорошо нам знакомой поверхности — листа Мебиуса. Так, например, если мы из поверхности гептаэдра вырежем узкую полоску (на рис. 54 она заштрихована), внутри которой целиком лежит путь $MNPQRS$, то эта полоска будет представлять собой не что иное, как лист Мебиуса. Ведь на гептаэдре концы полоски $m'n'm''n''$ должны быть склеены так, чтобы точка m' совпадала с m'', а точка n' с точкой n''. Это значит, что перед тем как склеивать концы полоски, один из них нужно перевернуть. Именно таким образом и получался лист Мебиуса.

Что касается направления обхода многоугольников, составляющих многогранник, то для двустороннего многогранника всегда можно задать направления обхода его граней таким образом, чтобы все они оказались согласованными, т. е. чтобы ка-

ждое ребро, принадлежащее двум соседним граням, приходилось в этих двух многоугольниках в противоположных направлениях. На рис. 55 показан, например, согласованный обход граней тетраэдра на его выкройке.

На одностороннем многограннике согласованный обход граней установить нельзя, потому что из каждого такого многогранника, как мы видели на примере гептаэдра, можно вырезать лист Мебиуса, а на этом листе согласованный обход граней невозможен. В самом деле, если во всех частях узкой полосы $m'n'm''n''$ мы установим согласованные обходы границ и склеим стороны m' n' и m'' n'' так, чтобы точка m' совпала с m'', а точка n' с точкой n'', то получившаяся после склеивания сторона mn как в I, так и в III многоугольниках (рис. 56) будет иметь одно и то же направление от точки m к точке n. Значит, обход этой стороны не будет согласованным.

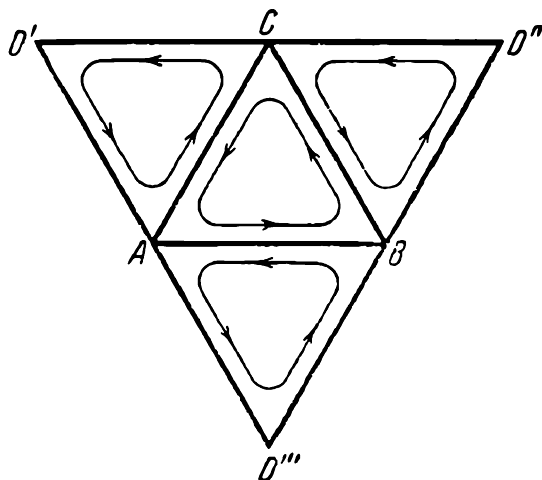


Рис. 55

В заключение приведем пример многогранника, некоторые из граней которого являются звездчатыми многоугольниками. Возьмем правильный звездчатый пятиугольник (рис. 57) и построим пять квадратов, основаниями которых служат стороны этого пяти-

угольника и плоскости которых составляют прямой угол с плоскостью многоугольника. Если эту фигуру мы накроем сверху еще одним правильным звездча-

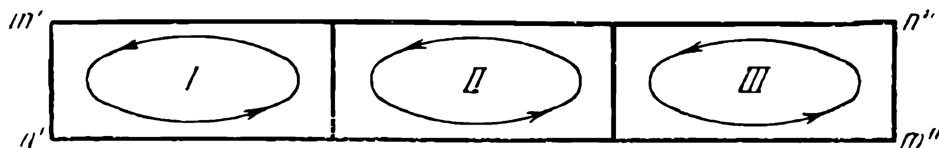


Рис. 56

тым пятиугольником, то получим звездчатую пятиугольную призму, изображенную на рис. 58.

Разнообразие форм звездчатых многогранников очень велико. Мы настоятельно рекомендуем читателю попробовать склеить из бумаги несколько звезд-

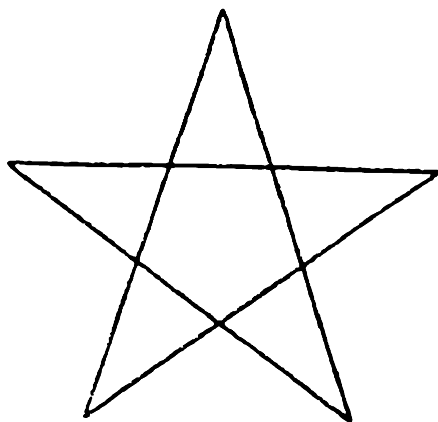


Рис. 57

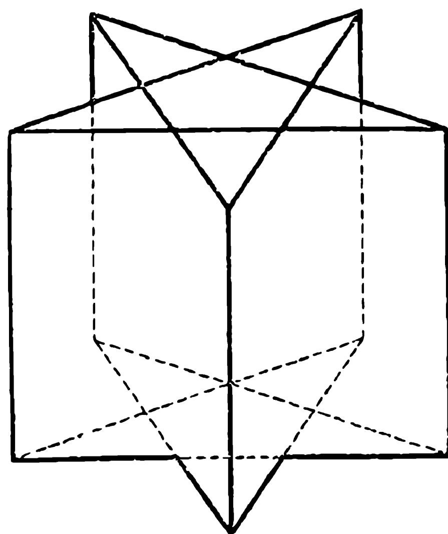


Рис 58

чатых многогранников. Конечно, части некоторых граней на такой модели не будут видны, так как закроются другими гранями; поэтому требуется из-

вестное усилие воображения, чтобы представить на ней расположение граней.

Полезно также изготовлять модели многогранников из проволоки. В таких моделях, собственно говоря, граней совсем нет, так как проволочная модель дает только сетку ребер. Но глядя на ребра, не трудно представить себе, как располагаются грани.

Задачи к четвертой главе

1. Вырезать прилагаемые выкройки многогранников и склеить их (рис. 59—62; см. вкладной лист).

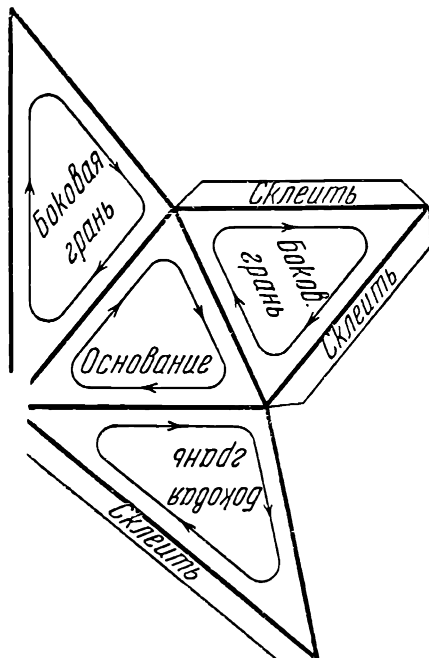


Рис. 59. Выкройка тетраэдра (треугольной пирамиды)

Боковая грань

Верхнее основание

Боковая грань

Боковая грань

Нижнее основание

Боковая грань

Рис. 60. Выкройка куба

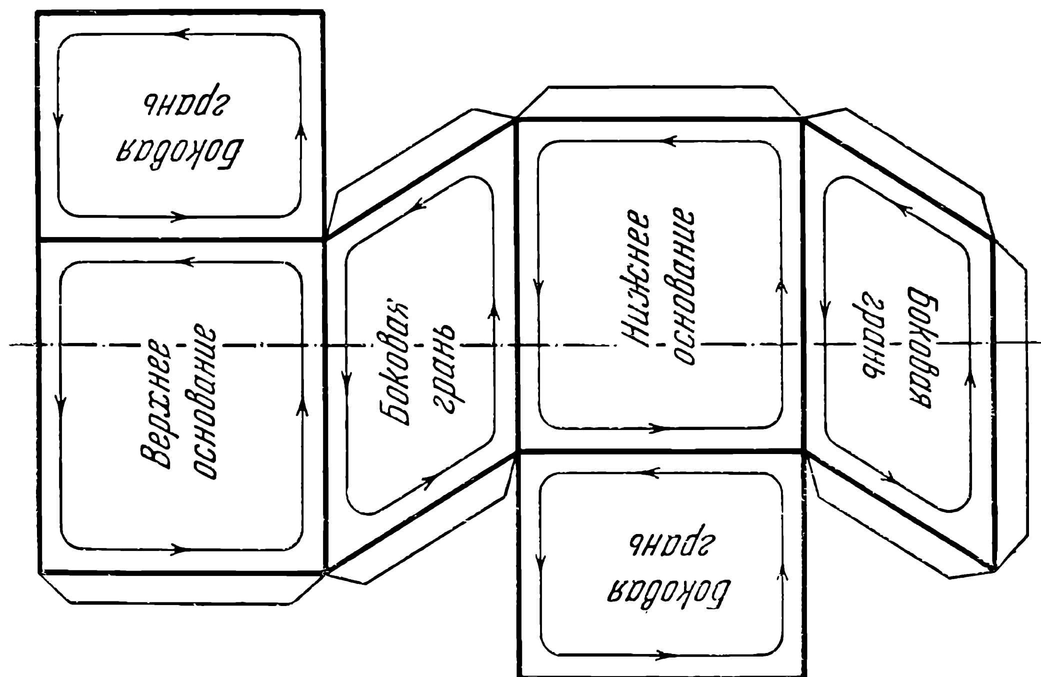
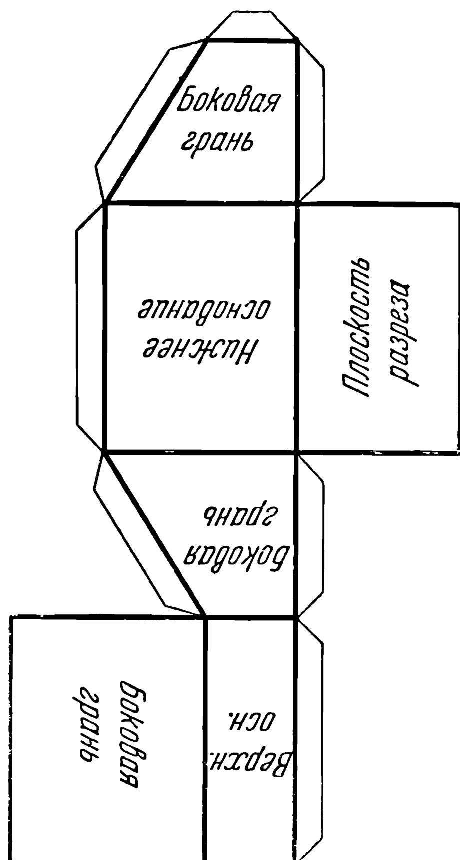


Рис. 78. Выкройка прямого параллелепипеда

Р. И. Бончковский



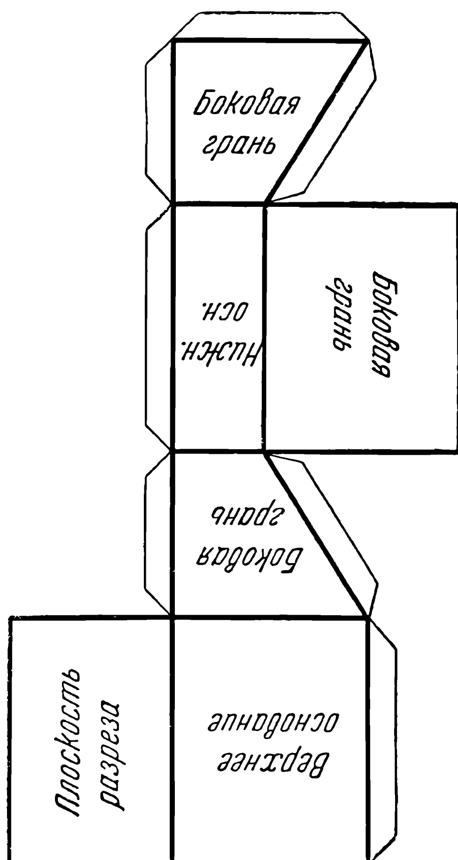


Рис. 79a и b. Превращение прямого параллелепипеда в прямоугольный

Глава пятая

ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЫ И ПРИЗМЫ

Определение объемов многогранников мы начнем с определения объема куба. Возьмем куб, сторона которого равна 8 см. При отыскании его объема мы будем поступать аналогично тому, как мы поступали в первой главе при определении площади прямоугольника.

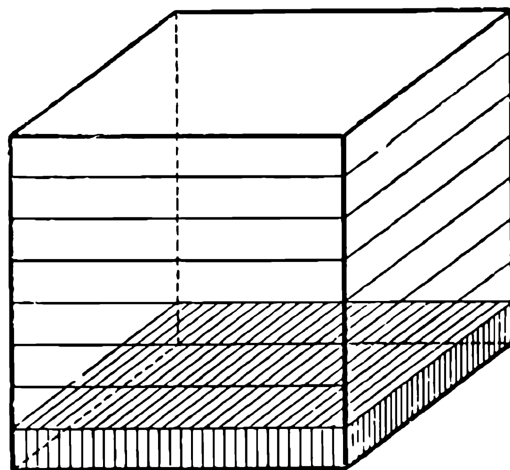


Рис. 63

Разрежем куб плоскостями, параллельными основанию на 8 слоев одинаковой толщины (рис. 63). Очевидно, толщина каждого слоя будет равна 1 см. Разрежем далее куб плоскостями, параллельными одной из боковых граней также на 8 слоев одинаковой толщины. Тогда каждый из полученных ранее слоев распадется на 8 столбиков с квадратными основаниями в 1 см² (рис. 64). Всего таких столбиков будет $8 \times 8 = 64$. Наконец, если мы разрежем куб в третьем возможном направлении, параллельно

другой боковой грани, таким образом, чтобы и в этом случае он распался на 8 слоев одинаковой толщины, то каждый из полученных ранее столбиков распадется на 8 кубиков с ребром в 1 см (рис. 65). Таких кубиков будет $8 \times 64 = 512$, так как мы получили 64 столбика по 8 кубиков в каждом. Поскольку каждый маленький кубик, очевидно, является кубическим сантиметром, объем куба равен **512 см³**.

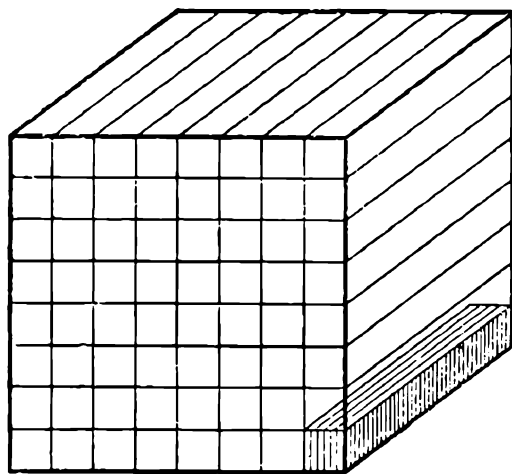


Рис. 64

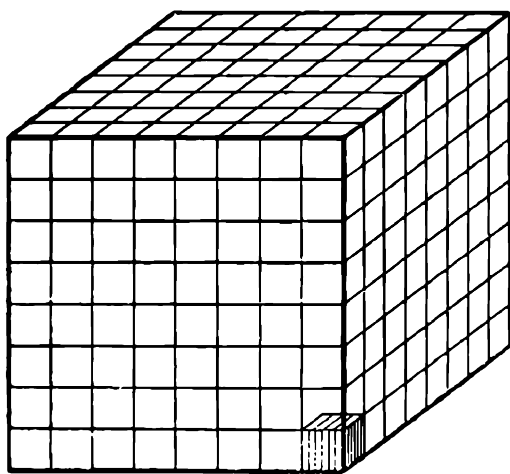


Рис. 65

Не трудно проследить, как получилось число 512. Нам пришлось перемножить 8 см×8 см, а затем это произведение еще раз умножить на 8 см. Таким образом, нам пришлось перемножить три восьмерки: 8 см× ×8 см×8 см. Но 8 см — длина ребра нашего куба. Стало быть, для того, чтобы получить объем куба, нужно длину его ребра три раза перемножить самое на себя. Например, объем куба с ребром

в 3 см будет $3\times3\times3=27$ см^3; объем куба с ребром в 4 см будет $4\times4\times4=64$ см^3.

Определение объема прямоугольного параллелепипеда, т. е. прямоугольного бруска, нисколько не труднее. Пусть, например, прямоугольный параллелепипед имеет в длину 18 см, в ширину 6 см и и в вышину 4 см. Объем его будет $18\times6\times4=432$ см^3. Здесь нам пришлось длину прямоугольного параллелепипеда умножить на его ширину и высоту, так как параллелепипед можно разрезать на 18 слоев по 6 столбиков в каждом, причем каждый столбик будет содержать 4 кубических сантиметров. Если мы заметим, что произведение длины на ширину дает площадь основания параллелепипеда, то правило для нахождения объема прямоугольного параллелепипеда можно высказать еще иначе: объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту.

Объемы некоторых многогранников можно определять тем же приемом, что и площади многоугольников, т. е. путем разрезания многогранника на части и составления из этих частей другого многогранника, объем которого мы умеем находить. К сожалению, в то время как на плоскости любые два многоугольника, имеющие равные площади, мы можем преобразовать этим способом один в другой, в пространстве два многогранника могут иметь одинаковые объемы, хотя и нельзя превратить один из них в другой путем разрезания и перекладывания частей. Доказательство этого довольно сложно, поэтому мы

не будем приводить его здесь. Наиболее подготовленным из наших читателей, интересующимся этим вопросом, мы рекомендуем небольшую книжку проф. В. Ф. Кагана — «О преобразовании многогранников», в которой дается доказательство этого факта.

Из наиболее часто встречающихся многогранников в прямоугольный параллелепипед могут быть превращены прямой и наклонный параллелепипед и призмы.

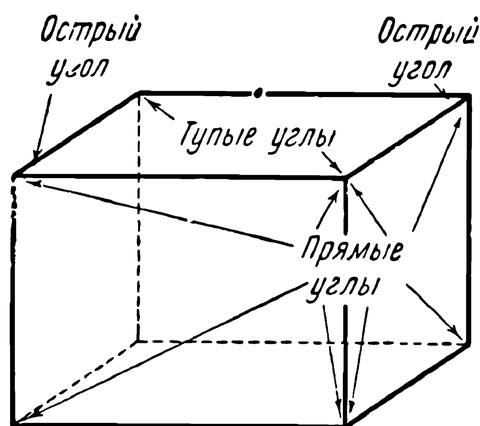


Рис. 66

Прямым параллелепипедом называется многогранник, отличающийся от прямоугольного параллелепипеда только тем, что его основание не прямоугольник, а параллелограм (рис. 66). Боковые же грани его суть прямоугольники так же, как и у прямоугольного параллелепипеда. «Прямым» такой параллелепипед называется потому, что его боковые ребра торчат «прямо», т. е. перпендикулярно к основанию. Поэтому высота прямоугольного параллелепипеда равна длине бокового ребра.

Прямой параллелепипед можно превратить в прямоугольный. Для этого нужно разрезать его на две части плоскостью, перпендикулярной к ребрам AB, DC, HG и EF, а затем части приложить друг к другу гранями $ADHE$ и $BCGF$ так, чтобы вершины этих

граней совпали: A с B, D с C, H с G и E с F (рис. 67 и 68).

При этом преобразовании объем параллелепипеда не изменяется, так как и прямой и прямоугольный параллелепипеды состоят из одних и тех же частей.

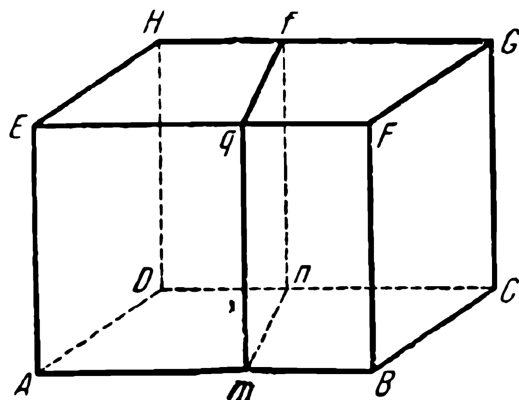


Рис. 67

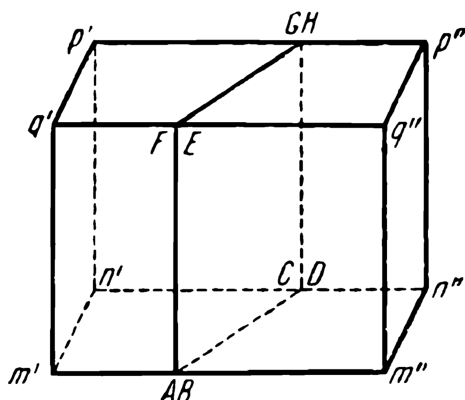


Рис. 68

Площадь основания и высота также не изменяются. Но объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту:

$$v = s \cdot h;$$

поскольку при нашем преобразовании все величины, входящие в эту формулу, остаются неизменными, объем прямого параллелепипеда также равен произведению площади основания на высоту.

Интересно отметить, что то же правило для вычисления объема прямого параллелепипеда сохраняется и тогда, когда за основание принята какая-либо из прямоугольных граней. В этом случае параллелепипед будет уже наклонным (т. е. его боковые ребра не будут торчать «прямо») и потому

его высота не будет равна длине бокового ребра. Высоту параллелепипеда придется измерять по перпендикуляру *HN* к основанию (линия *HN* будет отвесной, если грань *EFBA* расположена горизонтально, рис. 69).

Наклонный параллелепипед можно также легко превратить в прямоугольный. Грани *EFGH* и *ABCD*

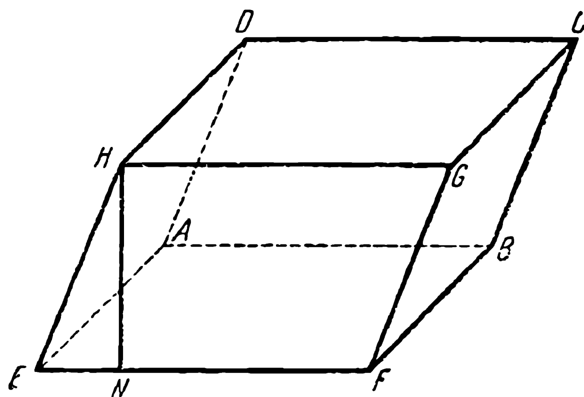


Рис. 69

составляют прямые углы с основанием. Поэтому, чтобы преобразовать этот параллелепипед в прямоугольный, необходимо сделать так, чтобы и две другие боковые его грани оказались перпендикулярными к основанию. Для этого нужно сделать тот самый разрез *mnpq*, к помощи которого мы только что прибегали при другом положении этого параллелепипеда (рис. 70; сравнить его с рис. 67). Параллелепипед распадается при этом на те же две части, что и в предыдущем случае, тот же способ их соединения приводит опять к образованию прямоугольного параллелепипеда (рис. 71; сравнить его с рис. 68).

Объем параллелепипеда, площадь его основания и высота не изменяются и на этот раз. Поэтому

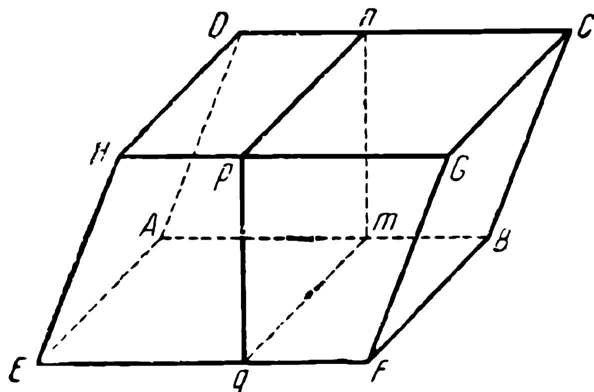


Рис. 70

и в данном случае объем параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту.

Остается рассмотреть наиболее общий случай, когда все грани параллелепипеда представляют собой параллелограмы.

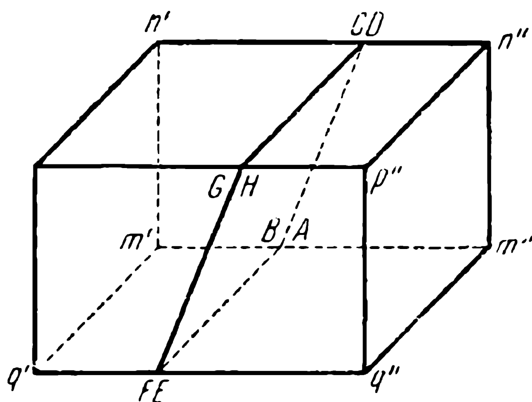


Рис. 71

В этом случае ни одна из боковых граней и ни одно из боковых ребер не торчит «прямо». Такой параллелепипед, который также является наклонным, не трудно превратить в наклонный предыдущего вида, т. е. в такой, у которого две боковых грани торчат прямо, а две наклонны. На рис. 72 изображен наклонный параллелепипед общего вида. Его высота *HI* падает в точку *I*,

находящуюся внутри параллелограма, лежащего в основании; у наклонного параллелепипеда предыдущего вида высота падала на сторону параллело-

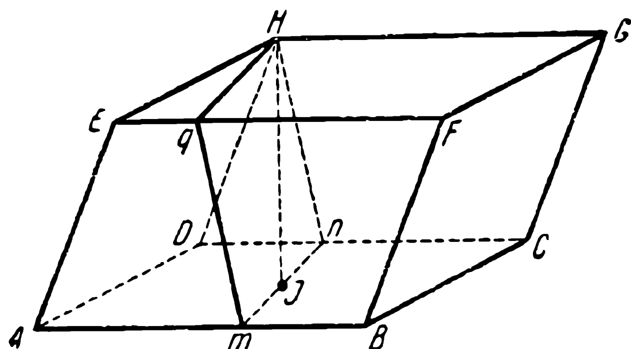


Рис. 72

грама, лежащего в основании, а у прямого параллелепипеда — в его вершину.

Проведем теперь через высоту HI плоскость, перпендикулярно к ребрам AB, DC, HG и EF; на рис. 72 это — плоскость $mnHq$, рассекающая параллелепипед на две части. Если мы сложим эти части гранями $ADHE$ и $BCGF$ таким образом, чтобы вершины граней $ADHE$ и $BCGF$ совпали друг с другом,

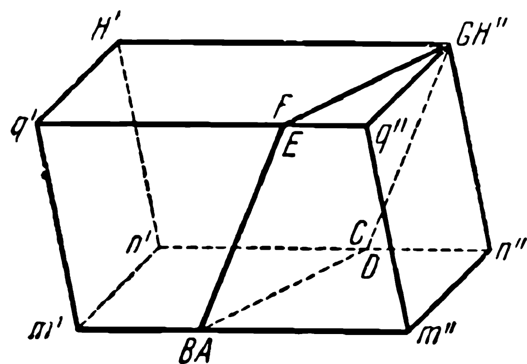


Рис. 73

а именно A с B, D с C, H с G и E с F, то параллелепипед общего вида $ABCDEFGH$ превратится в наклонный параллелепипед $m'm''n''n'q'q''H''H'$ (рис. 73), который мы рассматривали в предыдущем случае.

У этого параллелепипеда грань $m'n'H'q'$ проходит через перпендикуляр к плоскости основания, следовательно, грань $m'n'H'q'$ перпендикулярна к плоскости основания так же, как и параллельная ей грань $m''n''H''q''$. Итак, в параллелепипеде $m'm''n''n'q'q''H''H'$ две боковых грани перпендикулярны к плоскости основания. Объем его мы уже умеем находить. Он равен произведению площади основания параллелепипеда на его высоту.

Но первоначальный параллелепипед $ABCDEFGH$ имел такой же объем, такую же площадь основания и такую же высоту, как и этот, следовательно, и его объем равен произведению площади основания на высоту.

Теперь, когда мы рассмотрели всевозможные виды параллелепипедов, т. е. многогранников, которые ограничены тремя парами равных параллелограмов, расположенных в параллельных плоскостях, мы можем высказать общее правило: объем всякого параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту.

Это не единственное правило, которым можно пользоваться для нахождения объема параллелепипеда. Другое, тоже очень удобное правило, можно установить из рассмотрения рис. 68, 71, 73. На всех этих рисунках грань $m'n'p'q'$ ($m'n'H'q'$ на последнем из них) перпендикулярна к ребру $m'm''$. Поэтому, если мы примем эту грань за основание параллелепипеда $m'n'p'q'm''n''p''q''$ (т. е. поставим его на эту грань), то высотой его будет линия $m'm''=AB$.

Следовательно, объем этого параллелепипеда равен произведению площади параллелограма $m'n'p'q'$ на высоту $m'm''=AB$.

Но параллелограм $m'n'p'q'$ есть сечение первоначального параллелепипеда (рис. 67, 70, 72), перпендикулярное к ребру AB; $m'm''$ равно ребру AB и объем параллелепипеда $m'n'p'p'm''n''p''p''$ равен объему параллелепипеда $ABCDEFGH$. Значит,

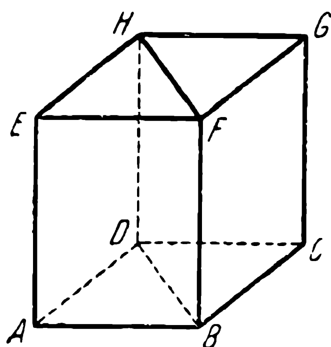


Рис. 74а

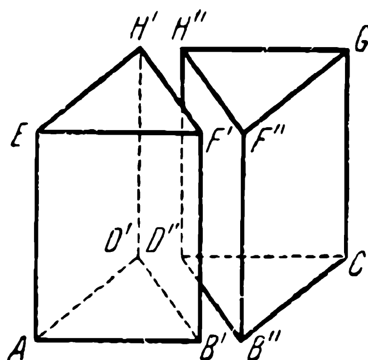


Рис. 74b

объем параллелепипеда $ABCDEFGH$ равен длине его ребра, умноженной на площадь сечения, перпендикулярного к этому ребру. Это правило нередко бывает в высшей степени полезно.

Если параллелепипед $ABCDEFGH$ (рис. 74) разрезать диагональной плоскостью $DBFH$, то он распадется на две части, каждая из которых есть так называемая треугольная призма. Последняя ограничена пятью гранями: двумя (верхним и нижним) основаниями — треугольниками и тремя боковыми гранями — параллелограмами. Если параллелепипед $ABCDEFGH$ прямой, то и призмы, полу-

чившиеся из него, будут прямыми, т. е. их боковые ребра будут торчать «прямо», перпендикулярно плоскости основания.

Объем прямой призмы вычисляется тем же способом, как и объем параллелепипеда. Ведь плоскость $DBFH$ делит прямой параллелепипед $ABCDEFGH$ на две совершенно одинаковых призмы, так что объем каждой из них равен половине объема параллелепипеда. Но объем параллелепипеда равен произведению площади его основания на его высоту; так как объем нашей призмы вдвое меньше, то он равен произведению половины площади основания параллелепипеда на его высоту. Заметив, что площадь основания призмы равна как раз половине площади основания параллелепипеда (сравни на рис. 74 треугольник ABD с параллелограмом $ABCD$), приходим к окончательному выводу: объем прямой треугольной призмы равен произведению ее основания на высоту.

Что касается наклонной призмы (рис. 75), то ее не трудно превратить в прямую, разрезав на две части плоскостью GHJ, перпендикулярной к боковым граням, и поставив нижнюю часть на верхнюю, как это сделано на рис. 76. Из этого превращения видно, что объем наклонной призмы равен площади сечения, перпендикулярного к боковому ребру, умноженной на длину бокового ребра. Иначе говоря, объем наклонной призмы можно определять по тому же правилу, что и объем параллелепипеда: объем наклонной призмы равен длине боко-

вого ребра, умноженной на площадь сечения, перпендикулярного к этому ребру.

Но можно показать, что и первое правило, которое мы вывели для прямой призмы, справедливо также и для наклонной. Именно, ее объем равен

Рис. 75

Рис. 76

произведению площади основания на высоту. К этому выводу мы можем притти следующим образом.

Разрежем наклонный параллелепипед *ABCDEFGH* (рис. 77) плоскостью *DBFH* на две наклонных призмы и проведем плоскость, перпендикулярную к боковым его ребрам. Эта последняя пересекает призмы по треугольникам *IKM* и *KLM*, которые, очевидно, равны. Отсюда следует, что и объемы призм равны, так как объем одной из них равен произведению бокового ребра *BF* на площадь треугольника *KLM*, а объем второй — произведению того же бокового ребра *BF* на площадь треугольника *IKM* (кото-

рая равна площади KLM). Но если объемы рассматриваемых призм равны, то, следовательно, объем каждой из них равен половине объема параллелепипеда.

Площадь треугольника ABD, являющегося основанием одной из призм, равна половине площади основания параллелепипеда, а высота призмы — высоте параллелепипеда. Поэтому мы получим как раз объем половины параллелепипеда (следовательно, объем призмы), если площадь основания призмы умножим на ее высоту.

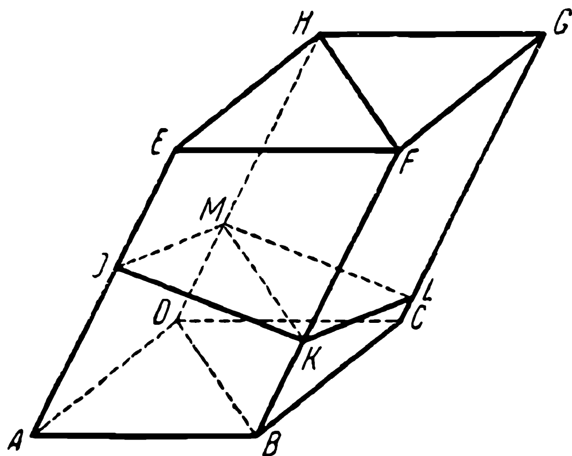


Рис. 77

Объемы четырехугольной, пятиугольной и других многоугольных призм определяются по тем же правилам, как и объем треугольной: площадь основания призмы умножается на ее высоту. В справедливости этого правила можно убедиться, разрезав многоугольную призму на треугольные: сумма площадей оснований треугольных призм будет равна площади основания многоугольной, а высоты всех призм будут одинаковы. Кроме того, объем многоугольной призмы равен сумме объемов треугольных призм, из которых она составлена. Из сопоставления этих двух фактов и вытекает наше правило.

Задачи к пятой главе

1. На чертежах (рис. 78 и 79; см. вкладной лист) даны выкройки прямого параллелепипеда, а также тех частей, на которые нужно его разрезать, чтобы превратить его в прямоугольный. Вырезать и склеить их и на полученной модели рассмотреть это превращение.

2. На чертежах (рис. 80 и 81; см. вкладной лист) даны выкройки наклонного параллелепипеда общего вида, а также тех частей, на которые его нужно разрезать, чтобы превратить в прямой. Вырезать и склеить их и на полученных моделях рассмотреть это превращение.

3. По выкройке, данной в задаче 1 к четвертой главе, склеить две треугольных призмы и сложить из них прямой параллелепипед. Объяснить на примере этой модели, что объем призмы равен произведению площади ее основания на высоту.

4. Начертить выкройку наклонной треугольной призмы, вырезать выкройку и склеить эту призму.

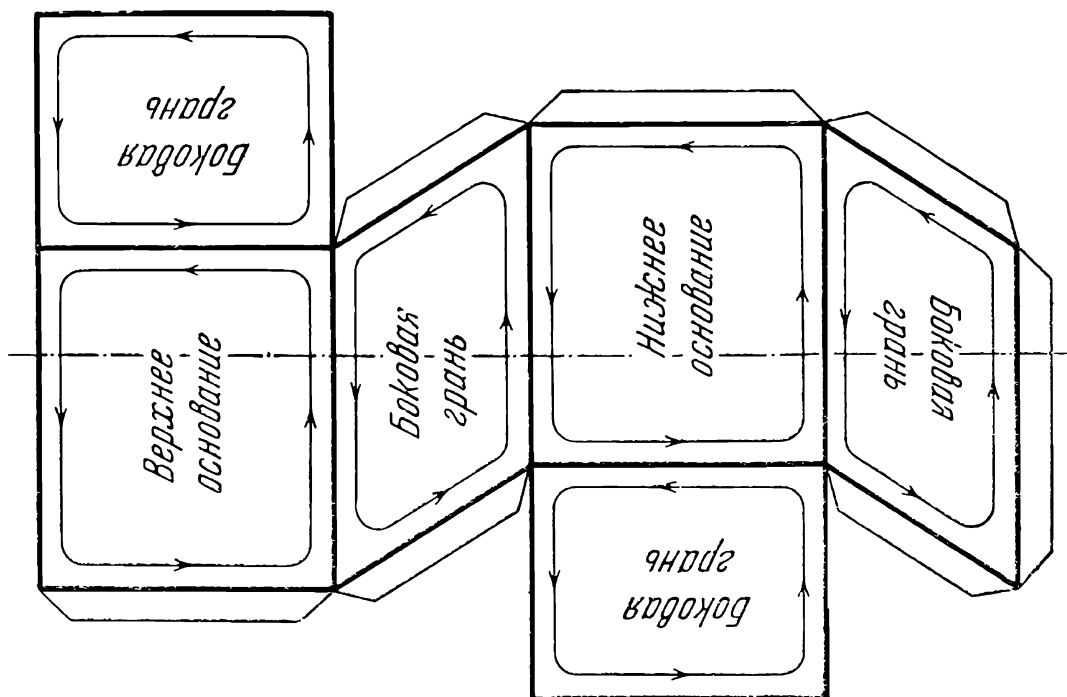
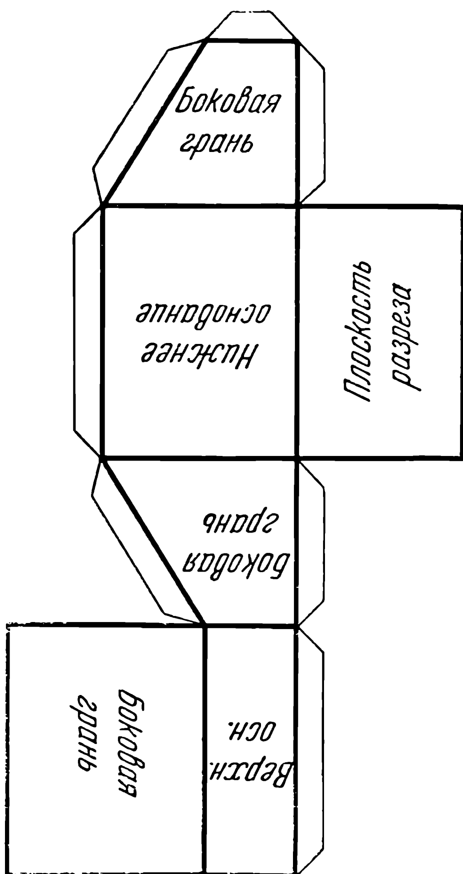


Рис. 78. Выкройка прямого параллелепипеда



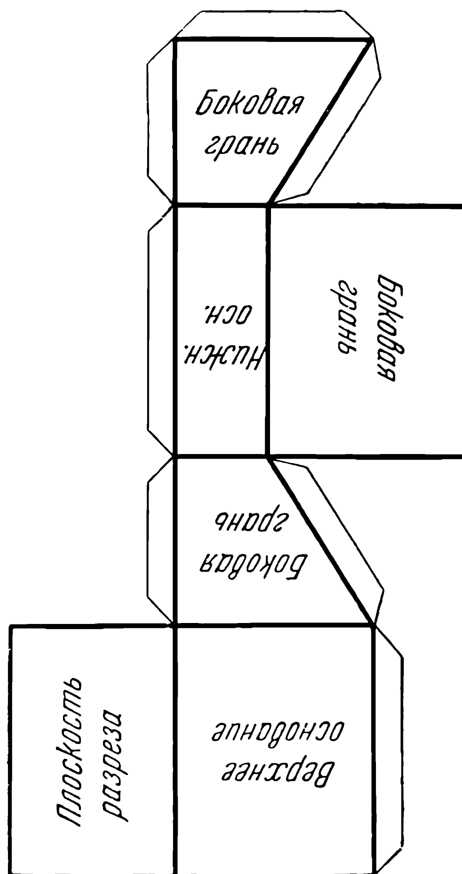


Рис. 79a и b. Превращение прямого параллелепипеда в прямоугольный

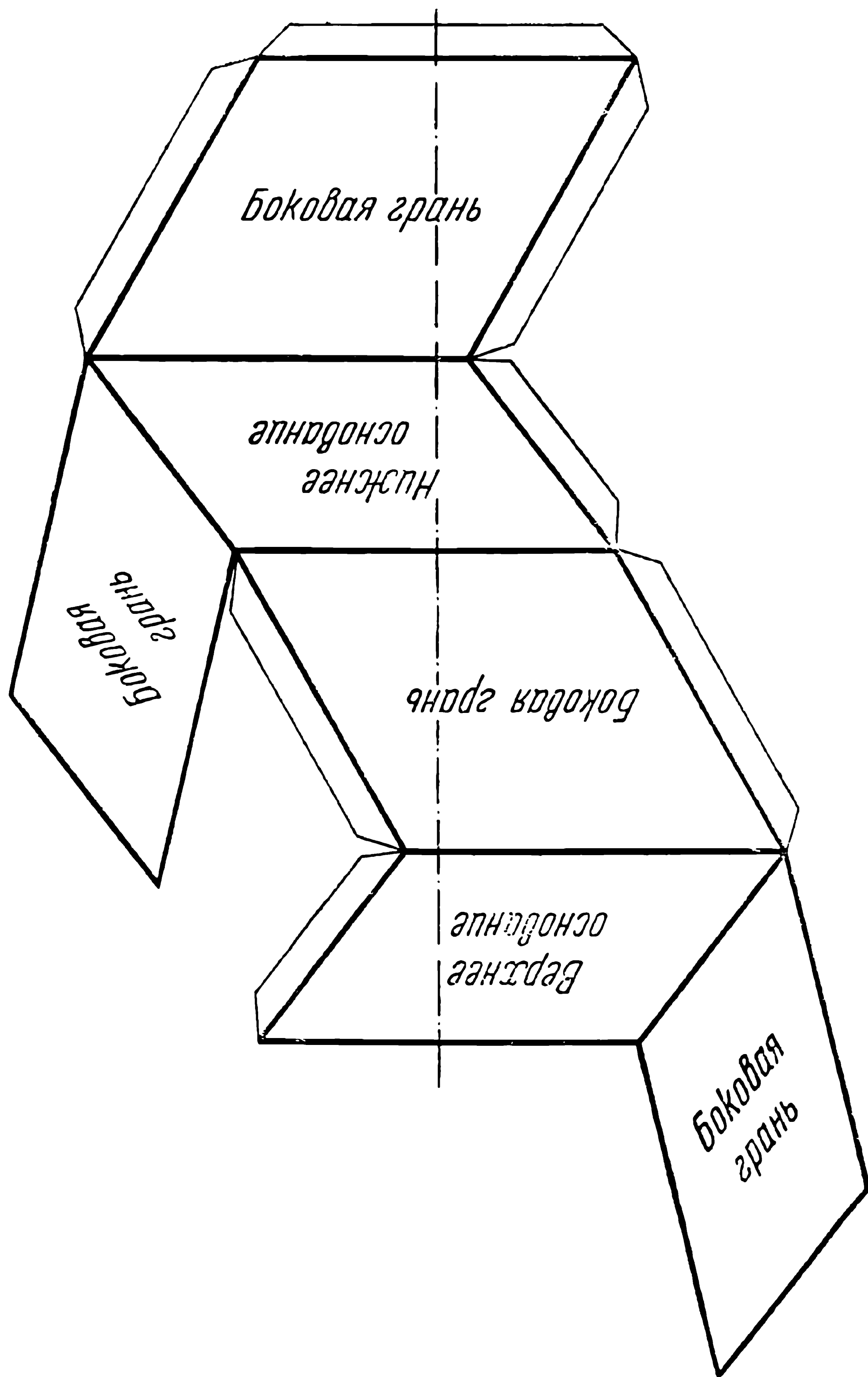
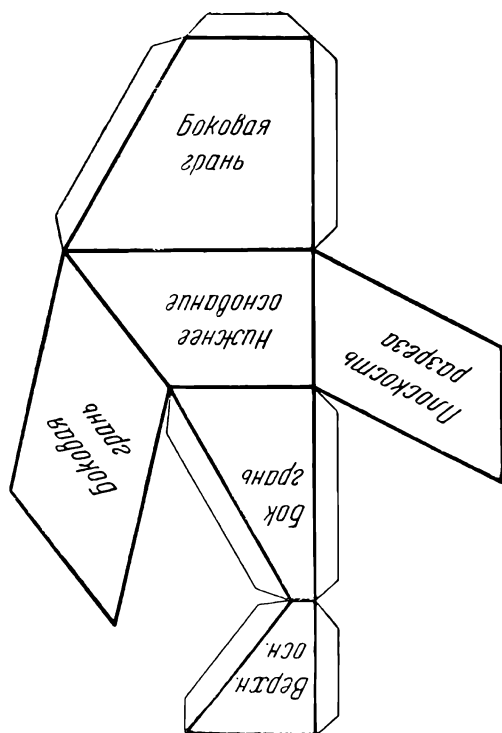


Рис. 80. Наклонный параллелепипед



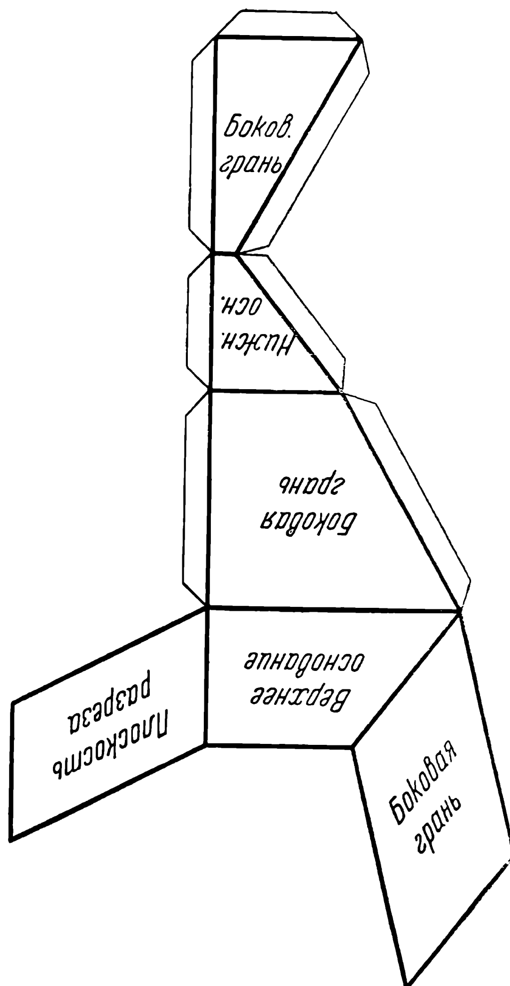


Рис. 81a и b. Превращение наклонного параллелепипеда в прямой

Глава шестая

ОБЪЕМЫ ПРОИЗВОЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

В предыдущей главе мы установили правила для вычисления объемов параллелепипедов и призм. К сожалению, помимо параллелепипедов и призм разной формы имеется мало других многогранников, которые можно было бы столь же легко превратить в прямоугольный параллелепипед. Более того: можно показать, что для многих многогранников такое превращение вообще невозможно, если разрезать их на конечное число частей. Оно невозможно даже для таких простых многогранников, как пирамида. Чтобы установить правила, с помощью которых можно было бы вычислять объемы любых многогранников, приходится прибегать к использованию принципа предельного перехода, с которым мы немного уже знакомы по третьей главе. Как в таких случаях пользуются этим переходом мы изложим ниже; здесь же, забежав немного вперед, укажем лишь основной результат: объем всякой пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту.

Чтобы читатель не впал в заблуждение и не смешал пирамиду с каким-нибудь другим многогранником, напомним, какой вид она имеет.

Пирамида ограничена одним многоугольником (основание пирамиды) и несколькими треугольниками, имеющими общую вершину, причем стороны этих треугольников, лежащие против этой вершины, являются в то же время сторонами многоугольника, лежащего в основании (на рис. 82 изображена пятиугольная пирамида).

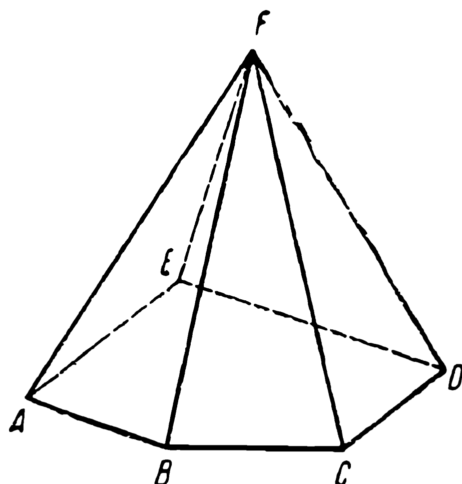


Рис. 82

По числу углов многоугольника, лежащего в основании, пирамиды разделяются на треугольные, четырехугольные, пятиугольные и т. д. Треугольная пирамида, как мы уже знаем, называется тетраэдром.

По аналогии с многоугольниками сейчас же приходит в голову такой способ определения объема произвольного многогранника: разобьем этот последний при помощи диагональных треугольников [1] на тетраэдры, затем определим объемы тетраэдров и сложим их. В результате получим, очевидно, объем многогранника. Конечно, этот способ можно применять, и он дает желаемый результат, но, к сожалению, разбить многогранник на тетраэдры далеко не так просто, как это может показаться на первый

[1] Диагональным треугольником мы называем такой треугольник, все вершины которого являются в то же время вершинами многогранника.

взгляд. Для каждого многогранника приходится искать свой способ разбиения его на тетраэдры, так как единого способа для всех многогранников указать невозможно. Все же покажем на одном примере, как можно выполнять такое разбиение.

На рис. 83 изображен так называемый призматоид. Он получен следующим образом: в двух параллельных плоскостях лежат два равных многоугольника (в нашем примере два квадрата *ABCD* и *EFGH*, расположенные так, что их стороны не параллельны). На вершины этих двух многоугольников натянуты треугольники *ABE*, *EFB*, *BCF*, *FGC*, *CDG*, *GHD*, *DAH* и *HEA*, которые служат боковыми гранями призматоида. Многогранник *ABCDEFGH* и есть призматоид.

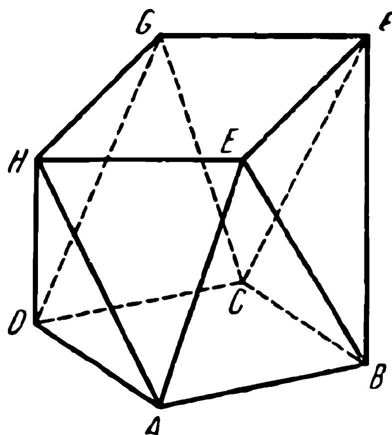


Рис. 83

Покажем, как можно разрезать призматоид на тетраэдры. Сначала натянем на вершины диагональные треугольники *ABH* и *EBH* (рис. 84). Они отсекут от призматоида тетраэдр *ABEH*. Далее, натянем треугольник *BFH* (он разрежет верхнее основание призматоида на два треугольника). Этот треугольник отсечет от призматоида тетраэдр *BEFH*. Удалив тетраэдры *ABEH* и *BEHF*, мы получим многогранник *ABCDHFG*, изображенный на рис. 85. В этом многограннике на одну вершину меньше, чем в первоначальном призматоиде. Разрезав его по диагональ-

ному треугольнику DBH, мы отделим еще один тетраэдр $ABDH$. Тогда число вершин многогранника уменьшится еще на одну единицу. Многогранник, оставшийся после удаления тетраэдра $ABDH$ (рис. 86), распадается на четыре тетраэдра, если произвести разрезы по диагональным треугольникам BCH, FCH, GCH, DCH. Таким образом, нам удалось

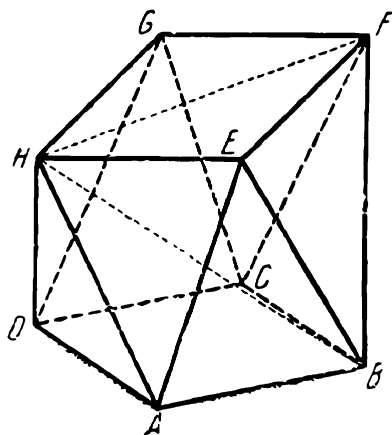


Рис. 84

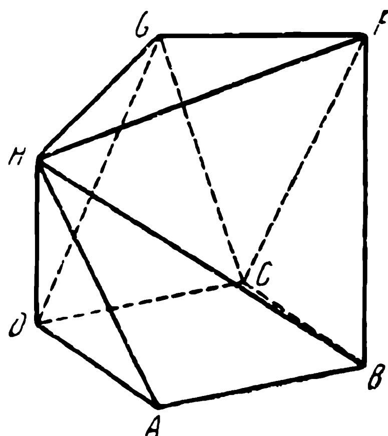


Рис. 85

разрезать призматоид на 7 тетраэдров; следовательно, его объем равен сумме объемов этих семи тетраэдров. Конечно, далеко не всякий из наших читателей справился бы самостоятельно с этой задачей.

Для очень многих случаев определения объемов многогранников мы можем дать одно общее правило. Именно, если внутри многогранника имеется такая точка O, из которой видны все грани многогранника, так что ни одна грань не загораживает других граней, то можно на все ребра многогранника и на эту точку натянуть треугольники, разбивающие многогран-

ник на пирамиды. Эти пирамиды имеют общую вершину в точке O и основаниями их служат грани многогранника. Так, например, уже рассмотренный нами призматоид может быть при помощи этого способа разрезан на 10 пирамид, из которых 8 треугольные ($OABE$, $OBEF$, $OBCF$, $OCFG$, $OCDG$, $ODHG$, $ODAH$, $OAEH$, рис. 87) и 2 четырехугольные ($OEFGH$ и

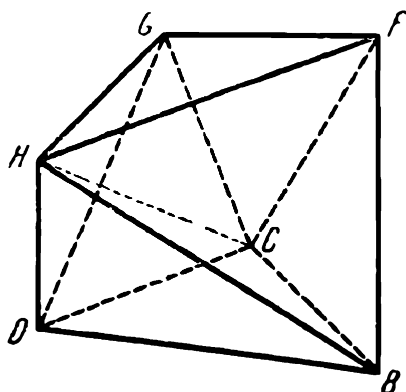


Рис. 86

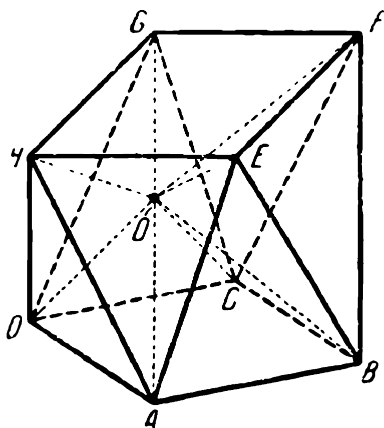


Рис. 87

$OABCD$). Разрезав многогранник на пирамиды, определяем их объемы, складываем их и в результате получаем объем первоначально взятого многогранника.

Этот способ вычисления объема многогранника сильно напоминает способ Мебиуса для определения площади многоугольника. Но способ Мебиуса можно было применять к любому многоугольнику, даже к звездчатому, благодаря тому, что мы заранее установили понятие о положительных и отрицательных площадях и складывали алгебраически площади получав-

шихся треугольников. Аналогичное правило для вычисления объема многогранника мы пока можем применять только к многограннику, внутри которого есть точка, из которой видны все грани многогранника. Сразу же возникает мысль, что это ограничение можно уничтожить, если подходящим образом ввести понятие о тетраэдрах с положительными и отрицательными

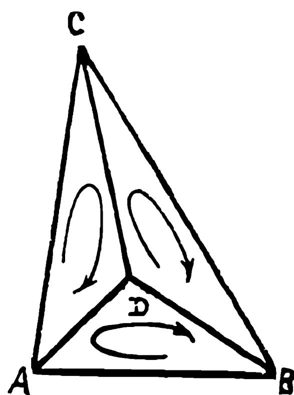


Рис. 88

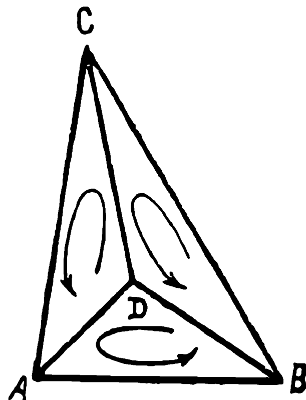


Рис. 89

объемами и затем определять объем многогранника как алгебраическую сумму объемов тетраэдров. К рассмотрению этого способа мы сейчас и приступим, при этом мы будем одновременно рассматривать как обыкновенные, так и звездчатые многогранники.

Согласованный обход граней на поверхности тетраэдра можно определить двумя способами (рис. 88 и 89). Напомним, что согласованным мы считаем такой обход граней тетраэдра, при котором общее двум смежным граням ребро проходится в этих двух гранях в противоположных направлениях. На рис. 88 все грани обходятся в направлении,

противоположном движению часовой стрелки, если смотреть на них из внутренней точки тетраэдра. При этом, как можно заметить, обход всех граней согласован.

Теперь представим себе, что мы находимся в вершине A тетраэдра, изображенного на рис. 88, и рассматриваем оттуда грань BDC, лежащую против этой вершины. Нам будет казаться, что она обходится в направлении, противоположном движению часовой стрелки. Если из вершины A мы переместимся в вершину B и из этой вершины будем рассматривать противолежащую ей грань, то будет казаться, что и эта грань обходится в направлении, противоположном движению часовой стрелки. То же самое нам будет казаться, если мы будем рассматривать противолежащие им грани из вершин C и D. Таким образом, если на гранях тетраэдра установлено согласованное направление обхода, то обход всех этих граней, рассматриваемых из противолежащих им вершин, будет казаться происходящим в одну и ту же сторону.

Тетраэдр, изображенный на рис. 88, мы будем считать положительно ориентированным, так как каждая его грань, если рассматривать ее из противолежащей вершины, кажется ориентированной положительно. Наоборот, тетраэдр, изображенный на рис. 89, мы будем считать ориентированным отрицательно, так как каждая его грань, если рассматривать ее из противолежащей вершины, представляется ориентированной отрицательно.

Сделанное замечание справедливо и по отношению к любому выпуклому многограннику, например, по отношению к обыкновенной пирамиде. Если грани выпуклого многогранника ориентированы согласованно, то они представляются обходимыми в одном и том же направлении из любой вершины. Этим замечанием мы в дальнейшем воспользуемся.

Что касается объемов тетраэдров, то мы будем приписывать им знаки, соответствующие ориентации тетраэдров. Следовательно, тетраэдр, изображенный на рис. 88, имеет положительный объем, а изображенный на рис. 89 — отрицательный. Численная величина объема тетраэдра определяется как $^1/_3$ произведения площади основания на высоту.

Пусть теперь нам требуется определить объем какого-либо многогранника; для большей общности возьмем звездчатый многогранник (рис. 51). Прежде всего устанавливаем согласованный обход (ориентацию) его граней. Если многогранник двусторонний (как изображенный на рис. 51), то нам удастся установить согласованный обход его граней; если же многогранник односторонний (например, гептаэдр на рис. 53), то, как мы уже знаем, согласованный обход его граней установить нельзя. Поэтому нам придется рассмотреть эти два случая отдельно.

На рис. 90 показана согласованная ориентация граней рассматриваемого нами многогранника. Для большей ясности перечислим, в каком направлении обходится каждая грань (буквы выписываем в порядке их чередования при обходе грани в выбранном

направлении): $EFGH$, $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$, $DAEH$, BAJ, CBJ, DCJ, ADJ. Советуем читателю проверить, что при такой ориентации каждое ребро в двух примыкающих к нему гранях проходится в противоположных направлениях.

После того как на многограннике установлен согласованный обход граней, выбираем в простран-

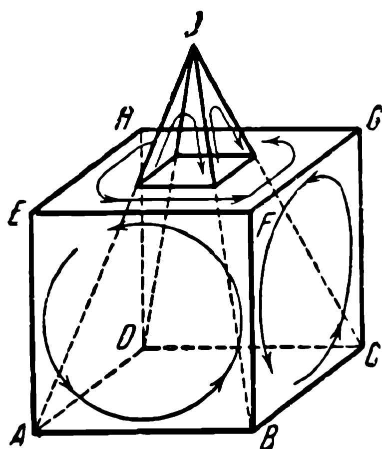


Рис. 90

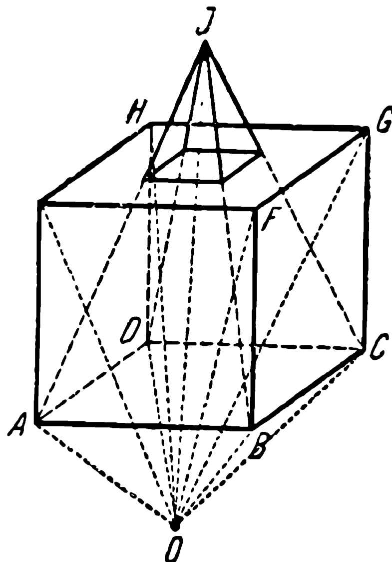


Рис. 91

стве произвольную точку O (рис. 91) и натягиваем на нее и на все ребра многогранника треугольники: OAB, OBC, OCD, ODA, OAE, OBF, OCG, ODH, OEF, OFG, OGH, OHE, OAJ, OBJ, OCJ, ODJ (16 треугольников). Вместе с гранями рассматриваемого многогранника эти треугольники дают 9 пирамид: $OEFGH$, $OABFE$, $OBCGF$, $OCDHG$, $ODAEH$, $OBAJ$, $OCBJ$, $ODCJ$, $OADG$, каждая из которых имеет основанием грань многогранника, а вершиной — точку O. На гранях каждой пирамиды устанавливаем

согласованную ориентацию таким образом, чтобы ориентация основания была такой же, как в основном многограннике. Чтобы читатель мог ясно разобраться в этом, приводим таблицу ориентаций граней всех пирамид (буквы идут в порядке их обхода).

Пирамиды	Обход граней
OEFGH	*EFGH*, *FEO*, *GFO*, *HGO*, *EHO*
OABFE	*ABFE*, *BAO*, *FBO*, *EFO*, *AEO*
OBCGF	*BGGF*, *CBO*, *GCO*, *FGO*, *BFO*
OCDHG	*CDHG*, *DCO*, *HDO*, *GHO*, *CGO*
ODAEH	*DAEH*, *ADO*, *EAO*, *HEO*, *DHO*
OBAJ	*BAJ*, *ABO*, *JBO*, *BJO*
OCBJ	*CBJ*, *BCO*, *JBO*, *CJO*
ODCJ	*DCJ*, *CDO*, *JCO*, *DJO*
OADJ	*ADJ*, *DAO*, *JDO*, *AJO*

Как легко можно убедиться, ориентации пирамид обладают тем свойством, что общая грань двух смежных пирамид обходится в различных направлениях. Например, пирамиды *OEFGH* и *OABFE* имеют общую грань *OFE*. В первой из них эта грань обходится в направлении *FEO*, а во второй — в направлении *EFO*, т. е. как раз в противоположном. То же самое, как это видно из таблицы, справедливо и по отношению к любой грани, общей для двух пирамид.

Теперь, когда установлена ориентация каждой пирамиды, можно определить ее знак. Для этого нужно знать, какое направление имеет обход осно-

вания пирамиды, если смотреть на него из вершины O. Из рис. 91, сравнив его с рис. 90, можно убедиться, что положительными будут пирамиды $OBAJ$, $OCBJ$, $ODCJ$, $OADJ$, а отрицательными $OEFGH$, $OABFE$, $OBCGF$, $OCDHG$, $ODAEH$. Под объемом нашего многогранника мы подразумеваем алгебраическую сумму объемов всех этих пирамид:

$$\text{объем}\,OBAJ + \text{объем}\,OCBJ + \text{объем}\,ODCJ + \\ + \text{объем}\,OADJ + \text{объем}\,OEFGH + \text{объем}\,OABFE + \\ + \text{объем}\,OBCGF + \text{объем}\,OCDHG + \\ + \text{объем}\,ODAEH, \qquad (1)$$

причем первые четыре члена являются положительными, а пять последних — отрицательными.

Чтобы оправдать такое определение объема многогранника, необходимо, конечно, показать, что для обыкновенных многогранников оно во всех случаях дает тот же результат, что и обычно, и что определяемый таким образом объем не зависит от выбора точки O, т. е. что при любом ее положении сумма (1) имеет одно и то же значение. Подробное рассмотрение этих вопросов завело бы нас слишком далеко; поэтому мы ограничимся лишь упоминанием, что имеются совершенно строгие доказательства этих двух положений. Следовательно, мы имеем полное право пользоваться новым определением объема многогранника. Оно в высшей степени удобно в том отношении, что им можно пользоваться при определении объема любого многогранника.

Итак, мы пришли к следующему способу определения объема многогранника:

1) Ориентируем грани многогранника так, чтобы получилась согласованная ориентация всех граней.

2) Берем произвольную точку пространства O.

3) Объем многогранника рассматриваем как алгебраическую сумму объемов пирамид, основаниями которых служат грани взятого многогранника, а общей вершиной точка O.

4) Знак объема каждой из этих пирамид определяется тем направлением, в котором обходится основание пирамиды, если рассматривать его из вершины.

Эти правила можно сформулировать еще проще, если вспомнить, что объем пирамиды равен произведению одной трети площади ее основания на высоту. Тогда этим правилам можно придать такой вид:

1) Ориентируем грани многогранника так, чтобы получилась согласованная ориентация всех граней.

2) Выбираем в пространстве произвольную точку O.

3) Определяем расстояния точки O от всех граней многогранника.

4) Площадь каждой грани умножаем на треть расстояния от этой грани до точки O. Площадь грани считается при этом положительной, если из точки O она кажется обходимой в направлении, обратном движению часовой стрелки, и отрицательной, если она кажется обходимой в противоположном направ-

лении; самое умножение выполняем по правилам алгебры с соблюдением правила знаков.

5) Все полученные произведения складываем (по правилам алгебры).

Что касается односторонних многогранников, то эти правила определения объема к ним не применимы, так как на них нельзя установить согласованную ориентацию граней. Поэтому мы не можем определить, с каким знаком должен войти в сумму объем каждой пирамиды, и потому сумма объемов пирамид будет зависеть от выбора знаков их объемов и не будет определенной. В связи с этим приходится считать, что односторонние многогранники объема не имеют. В частности не имеет объема хорошо знакомый нам гептаэдр.

Глава седьмая

ОБЪЕМ ПИРАМИДЫ

Мы уже упоминали, что при помощи рассмотренных ранее приемов нельзя показать равновеликость двух пирамид, у которых равны площади оснований и высоты. Между тем именно на равновеликости таких пирамид опирается доказательство теоремы о том, что объем пирамиды равен произведению одной трети площади ее основания на высоту. На основе этой теоремы как раз и строилось все учение об объемах, изложенное в предыдущей главе. Это значит что учение об объемах многогранников нельзя построить полностью так, как мы строили учение о площадях многоугольников. Для построения учения об объемах многогранников придется привлечь более сильное вспомогательное средство, а именно принцип предельного перехода. В геометрии на плоскости этот принцип понадобился нам лишь для определения длин кривых линий и площадей, ограниченных этими кривыми. В пространстве же принцип предельного перехода нужен даже для определения объема такой простой фигуры, как треугольная пирамида. При этом относящиеся сюда рассмотрения довольно сложны.

Рассмотрим сначала две пирамиды с равновеликими основаниями и равными высотами (рис. 92). Покажем, что объемы этих пирамид равны. Для этого расположим пирамиды так, чтобы их основания оказались лежащими в одной плоскости, как это сделано на рис. 92.

Итак, мы предполагаем, что треугольники ABC и $A'B'C'$ лежат в одной плоскости и имеют равные площади и что высоты H и H' пирамид равны.

Разделим теперь отрезок H на несколько равных

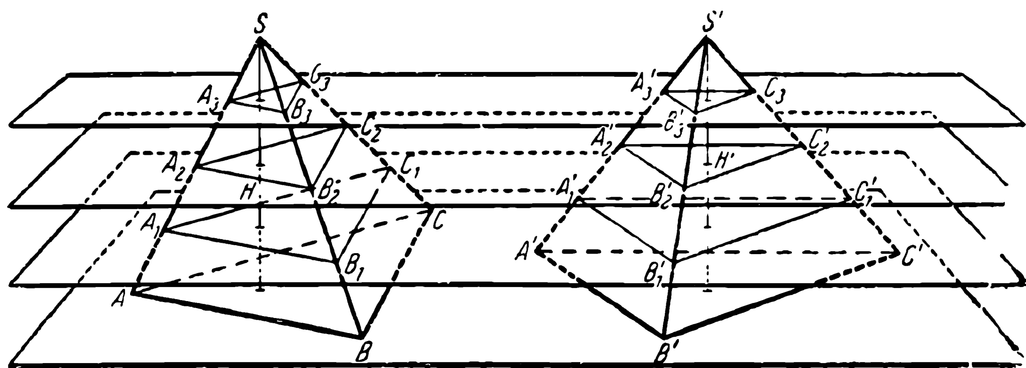


Рис. 92

частей (на нашем рисунке он разделен на 4 части). Затем, через точки деления проведем плоскости, параллельные той, в которой лежат основания пирамид. Эти плоскости разделят отрезок H' на столько же равных частей, как и H (в нашем случае на 4), а пирамиды рассекут по треугольникам, которые, как не трудно заметить, равновелики.

Площадь ABC = площади $A'B'C'$

Площадь $A_1B_1C_1$ = площади $A_1'B_1'C_1'$

Площадь $A_2B_2C_2$ = площади $A_2'B_2'C_2'$

Площадь $A_3B_3C_3$ = площади $A_3'B_3'C_3'$

Построим теперь на каждом из перечисленных треугольников как на основании призму, высота которой равнялась бы расстоянию между двумя параллельными плоскостями и боковые ребра которой были бы параллельны ребрам AS и $A'S'$ пирамид. Таким образом мы получим рис. 93 (на рисунке изображена только правая пирамида рисунка 92).

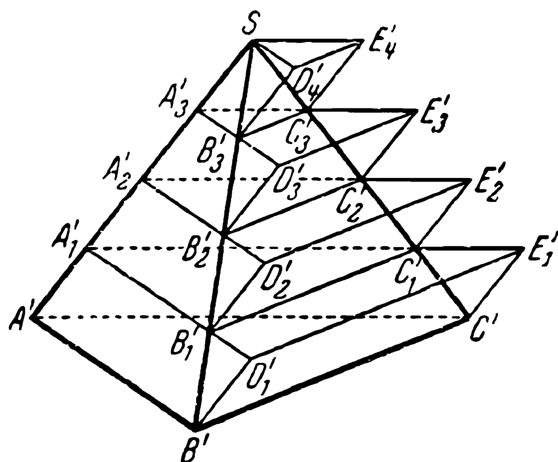


Рис. 93

Как видно на этом рисунке вместо пирамиды мы получим ступенчатое тело, состоящее из четырех призм, причем пирамида находится целиком внутри этого ступенчатого тела; значит, объем пирамиды меньше объема ступенчатого тела.

Сравним между собой оба ступенчатых тела, построенных для обеих пирамид. Нижние призмы $ABCA_1D_1E_1$ и $A'B'C'A_1'D_1'E_1'$ имеют равные объемы, потому что площади их оснований ABC и $A'B'C'$ равны, а их высоты, равные расстоянию между нижней и следующей, лежащей над ней параллельной плоскостью, одинаковы. По той же самой причине имеют равные объемы призмы $A_1B_1C_1A_2D_2E_2$ и $A_1'B_1'C_1'A_2'D_2'E_2'$, $A_2B_2C_2A_3D_3E_3$ и $A_2'B_2'C_2'A_3'D_3'E_3'$, наконец, $A_3B_3C_3S_4D_4E_4$ и $A_3'B_3'C_3'S_4'D_4'E_4'$.

Таким образом, оба ступенчатых тела состоят из призм, имеющих одинаковые объемы; значит, и сами ступенчатые тела имеют одинаковые объемы.

Наше рассуждение остается справедливым и в том случае, если вместо четырех плоскостей, рассекающих пирамиды, взять 5, 6, 10, 100, вообще любое число равноотстоящих плоскостей. Мы всегда сможем построить 5, 6, 10, 100 и т. д. призм, составляющих ступенчатое тело, внутри которого будет находиться наша пирамида. При этом объемы ступенчатых тел, внутри которых будут находиться две пирамиды с равными основаниями и высотами, будут равны независимо от количества секущих плоскостей.

Проследим теперь, как будет изменяться объем ступенчатого тела, если мы будем увеличивать число секущих плоскостей, а вместе с тем и число ступенек. Выступы (ступеньки) при увеличении числа секущих площадей будут становиться все меньше и ступенчатое тело будет все больше приближаться к форме пирамиды. Таким образом, объем пирамиды можно рассматривать как предел объема ступенчатого тела при неограниченном увеличении числа ступенек.

Но два ступенчатых тела с одинаковым числом ступенек, принадлежащих пирамидам $SABC$ и $S'A'B'C'$, имеют равные объемы. Это равенство объемов сохраняется все время при увеличении числа ступенек. Значит, объемы обоих ступенчатых тел должны стремиться к одному и тому же числу, т. е. к одному и тому же пределу. (В самом деле, раз две

величины изменяются совершенно одинаково, они, изменяясь, должны стремиться к одному и тому же числу). Но пределом объема одного ступенчатого тела при увеличении числа ступенек служит объем одной пирамиды, а пределом объема другого ступенчатого тела при тех же условиях — объем другой пирамиды. Значит, объемы наших пирамид равны. Мы пришли к цели нашего исследования: две пирамиды, у которых равны площади оснований и высоты, равновелики (т.е. имеют равные объемы).

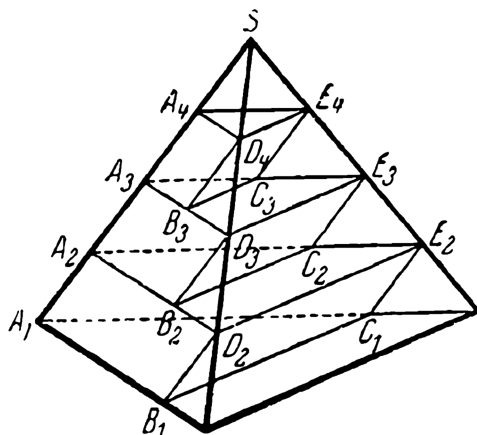


Рис. 94

В наших рассуждениях, которые мы постарались изложить по возможности кратко, чтобы сделать их более обозримыми, один пункт может вызвать законные сомнения, вследствие своей недостаточной наглядности Мы утверждали, что по мере увеличения числа ступенек (следовательно, и числа секущих плоскостей) объем ступенчатого тела стремится как к пределу к объему пирамиды. Этот пункт мы считаем нужным разъяснить подробнее.

Ограничим наше рассмотрение правой частью рис. 92. Каждую из призм, составляющих ступенчатое тело, за исключением самой нижней, опустим вниз настолько, чтобы ее верхнее основание заняло положение нижнего основания. Самую нижнюю призму

выбросим совсем. Тогда получим новое ступенчатое тело, лежащее целиком внутри пирамиды, как показано на рис. 94 (на этом рисунке изображена правая из пирамид рисунка 92).Следовательно, объем этого ступенчатого тела меньше объема пирамиды. Назовем это тело вписанным, ступенчатым телом, а рассмотренное ранее — описанным ступенчатым телом. Из нашего построения видно, что объем описанного тела превышает объем вписанного на объем самой нижней призмы $A'B'C'A_1'D_1'E_1'$ (рис. 93).

Будем теперь увеличивать число секущих плоскостей; для этого нам придется уменьшать расстояние между этими плоскостями и, следовательно, уменьшать высоты призм. Остановим наше внимание на призме $A'B'C'A_1'D_1'E_1'$. Ее основание остается все время неизменным, а высота, по мере уменьшения расстояния между секущими плоскостями, уменьшается и постепенно приближается к нулю. Следовательно, объем этой призмы стремится к нулю.

Объем призмы $A'B'C'A_1'D_1'E_1'$ есть разность между объемами описанного и вписанного ступенчатых тел. Следовательно, разность между объемами этих двух ступенчатых тел с увеличением числа секущих плоскостей стремится к нулю. Но объем описанного ступенчатого тела при любом числе ступеней больше объема пирамиды, а объем вписанного — меньше объема той же пирамиды. Поэтому разность между ними может стремиться к нулю только в том случае, если с увеличением числа ступеней объем обоих

ступенчатых тел стремится к объему пирамиды. Следовательно, объем пирамиды есть предел для объема описанного (а также вписанного) ступенчатого тела, если число ступенек неограниченно возрастает.

Наша цель достигнута. Мы вставили недостающее звено в доказательство того, что две пирамиды, имеющие равновеликие основания и равные высоты, равновелики.

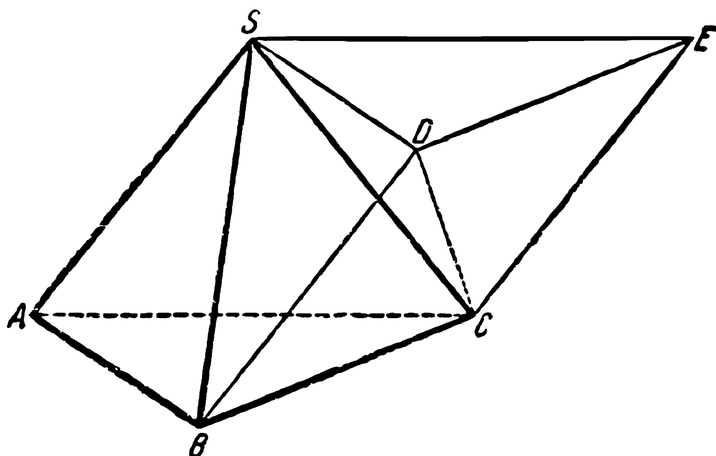


Рис. 95

Перейдем теперь к доказательству основной теоремы учения об объемах: объем треугольной пирамиды равен произведению одной трети площади ее основания на высоту. При этом мы будем существенным образом опираться на только что доказанное предложение.

Возьмем треугольную пирамиду $SABC$ и дополним ее до треугольной призмы $ABCSDE$ (рис. 95). Для этого нам придется треугольники ABS и ACS дополнить до параллелограмов $ABDS$ и $ACES$

и на стороны SD и SE натянуть треугольник SDE, а на стороны BC, CE, DE и DB — параллелограм $BCED$.

Объем полученной треугольной призмы равен произведению площади основания ABC (которое является в то же время основанием треугольной пирамиды) на ее высоту (которая равна высоте пирамиды). Поэтому, для доказательства нашей теоремы нам достаточно показать, что объем призмы в три раза больше объема пирамиды, иначе говоря показать, что призму можно разрезать на три куска, объем каждого из которых равен объему пирамиды.

Самое разрезание пирамиды на три таких части не представляет никакого труда. Прежде всего удалим пирамиду $SABC$; она представляет первую из трех частей. После удаления пирамиды $SABC$ у нас останется четырехугольная пирамида $SBCED$ (основание — $BCED$), которую мы можем разрезать на две треугольных пирамиды плоскостью SDC. Таким образом мы получим три пирамиды: $SABC$, $SBCD$ и $SCED$. Остается показать, что эти три пирамиды имеют равные объемы.

Сравним сначала пирамиды $SBCD$ и $SCED$. Будем считать их основаниями треугольники BCD и CED. Эти основания лежат в одной плоскости $BCED$ и, очевидно, равны, так как диагональ DC разбивает параллелограм $BCED$ на два равных треугольника. Итак, основания наших пирамид равны, а значит, и равновелики. Кроме того, рассматриваемые пирамиды имеют равные высоты.

В самом деле, вершина S у них общая и основания их лежат в одной плоскости $BCDE$; следовательно, высотой обеих пирамид служит расстояние от точки S до плоскости $BCED$. Итак, пирамиды $SBCD$ и $SCED$ имеют равновеликие основания и равные высоты; следовательно, объемы их одинаковы.

Перейдем теперь к сравнению пирамид $SABC$ и $SBCD$. На этот раз за основания мы примем треугольники ABS и BDS, а за общую вершину точку C. Эти пирамиды опять-таки имеют равные основания и высоты; значит, их объемы равны.

Таким образом, мы приходим к выводу, что три пирамиды $SABC$, $SBCD$ и $SCED$, на которые мы разрезали призму, имеют равные объемы; этим самым доказано наше утверждение, что объем пирамиды $ASBC$ равен одной трети произведения площади ее основания на высоту.

Если принцип предельного перехода понадобился нам для определения объема столь простой фигуры как треугольная пирамида, то он тем более необходим для определения объемов тел, ограниченных кривыми поверхностями и для определения площадей кривых поверхностей. Этим вопросам посвящается следующая глава.

Глава восьмая

ОБЪЕМЫ ТЕЛ, ОГРАНИЧЕННЫХ КРИВЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ. ПЛОЩАДИ КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Простейшими примерами кривых поверхностей могут служить всем известные поверхности цилиндра, конуса и шара. Для вывода формул, по которым можно вычислять объемы тел, ограниченных этими поверхностями, совершенно необходимо пользоваться принципом предельного перехода. Что касается вычисления площадей поверхностей, то для цилиндра и конуса задача облегчается, так как их можно (предварительно разрезав) разогнуть на плоскость и таким образом свести вычисление площади кривой поверхности к вычислению площади плоского куска. Правда, с более глубокой точки зрения, на которой мы здесь останавливаться не будем, доказательство возможности такого разгибания тоже опирается на принцип предельного перехода; но для нас это обстоятельство не имеет никакого значения, так как с наглядной стороны возможность разгибания цилиндра и конуса очевидна.

Возьмем прямой круговой цилиндр с высотой h и радиусом основания r (рис. 96). Такой цилиндр можно представить себе в виде круглой жестяной банки с двумя круглыми донышками. Геометры же

обычно говорят, что прямой круговой цилиндр получается от вращения прямоугольника AOO_1A_1 (рис. 96) вокруг стороны OO_1. При этом сторона OA описывает круг с центром в точке O — нижнее основание цилиндра, а сторона O_1A_1—круг с центром в точке O_1— верхнее основание цилиндра; наконец прямая AA_1 описывает собственно цилиндрическую поверхность. Высотой цилиндра считается длина прямой OO_1. Эта прямая называется его осью, а прямая AA_1— его образующей. Очевидно, длина образующей равна высоте цилиндра. Свое название образующая получила потому, что при вращении прямоугольника она зачерчивает или, иначе говоря, «образует» цилиндрическую поверхность.

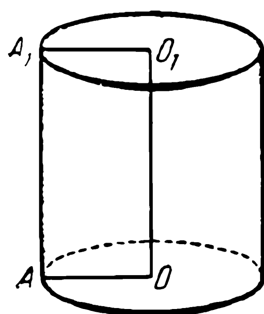


Рис. 96

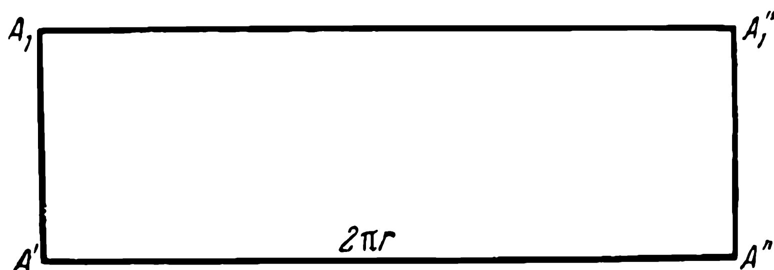


Рис. 97

Разрежем боковую поверхность цилиндра вдоль образующей AA_1 и разогнем ее. Тогда мы получим прямоугольник $A'A''A''_1A'_1$ (рис. 97), высота которого $A'A'_1$ есть не что иное, как образующая цилиндра, следовательно, она равна высоте последнего.

Основание прямоугольника — распрямленная окружность, лежащая в основании цилиндра; поэтому оно равно $2\pi r$. Стало быть, площадь прямоугольника равна $2\pi rh$. Но так как прямоугольник есть разогнутая боковая поверхность цилиндра, то эта последняя равна $2\pi rh$. Итак, боковая поверхность цилиндра равна произведению длины окружности $2\pi r$, лежащей в основании цилиндра, на ее высоту h.

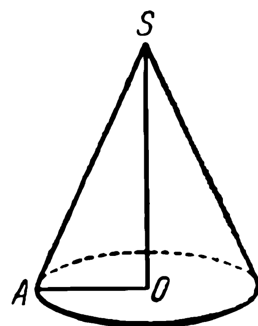


Рис. 98

Почти столь же просто можно определить площадь боковой поверхности конуса. Эта фигура получается при вращении прямоугольного треугольника OSA вокруг катета OS (рис. 98). Отрезок OA описывает окружность — основание конуса, а отрезок AS собственно коническую поверхность — боковую поверхность конуса.

Чтобы найти площадь боковой поверхности конуса, нужно эту поверхность разрезать по образующей AS и разогнуть на плоскость. Тогда на плоскости мы получим сектор круга, т. е. часть круга $SABA'$, ограниченную дугой ABA' и двумя радиусами SA и SA'. (рис. 99). Определив площадь сектора ASA', мы тем самым найдем площадь боковой поверхности конуса.

Очевидно, площадь рассматриваемого сектора во столько раз меньше площади круга с центром S и радиусом SA, во сколько раз длина дуги ABA' меньше длины всей окружности. В самом деле, если, например, дуга ABA' содержит m частей, а вся

окружность n таких же частей, то, разделив окружность на n равных частей и соединив точки деления с центром O, мы разобьем площадь круга на n равных частей, из которых m частей заполняют сектор ABA'. Значит, площадь сектора составляет $\frac{m}{n}$ площади целого круга.

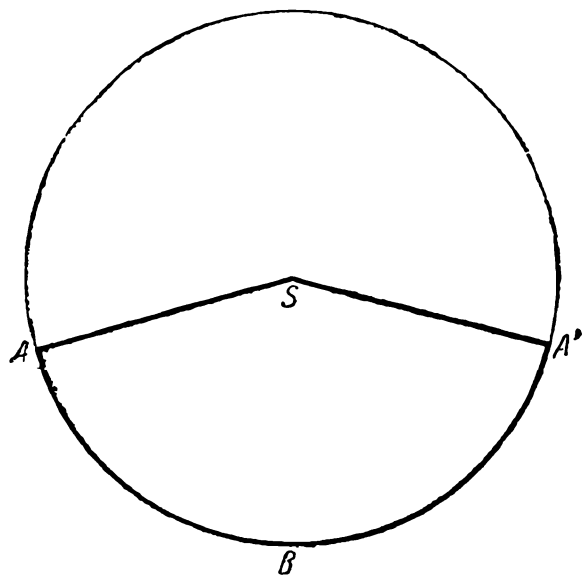


Рис. 99

Мы уже знаем, что площадь круга можно найти, умножив длину его окружности на половину радиуса. Так как дуга ABA' составляет $\frac{m}{n}$-ю часть окружности, то, умножив длину этой дуги на половину радиуса круга, мы получим $\frac{m}{n}$-ю часть площади круга. Но площадь сектора и есть как раз $\frac{m}{n}$-я часть площади круга. Следовательно, умножив длину дуги сектора на половину радиуса, мы получим площадь сектора.

В нашем случае, когда сектор есть разогнутая боковая поверхность конуса, его радиус равен длине образующей конуса. При этом длина дуги сектора равна длине окружности, лежащей в основании конуса, а площадь сектора — площади боковой поверх-

ности конуса. Поэтому, умножив длину окружности, лежащей в основании конуса, на длину его образующей, мы получим площадь боковой поверхности конуса. Это правило можно записать формулой

$$S = 2\pi r l,$$

где r — радиус основания конуса (следовательно, $2\pi r$ есть длина окружности основания конуса), l — длина его образующей.

К сожалению, помимо цилиндра и конуса нет других простых поверхностей, которые можно было бы разогнуть на плоскость. При определении площадей других поверхностей приходится пользоваться принципом предельного перехода, о котором мы уже неоднократно говорили в предыдущих главах.

Но в то время как на плоскости использование принципа предельного перехода не вызывало особых затруднений, применение его к пространственным фигурам, в частности при определении площадей поверхностей, нуждается в известных оговорках.

Чтобы пояснить, в чем состоят возникающие при этом затруднения, приведем пример, показывающий их возникновение, принадлежащий немецкому ученому Шварцу. Мы даем его в несколько упрощенной форме.

Представим себе, что мы хотим вычислить площадь боковой поверхности цилиндра (найденную в начале этой главы на основе других соображений) при помощи предельного перехода от поверхностей многогранников к поверхности цилиндра. По анало-

гии с окружностью мы можем думать, что нам удастся найти площадь боковой поверхности цилиндра, если мы впишем в него какой-нибудь многогранник, а затем, увеличивая число граней последнего и уменьшая одновременно их площади, перейдем к пределу. Но этот путь, вообще говоря, не приводит к намеченной цели. Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что даже если грани вписанного в цилиндр многогранника очень малы и поверхность его очень близко прилегает к поверхности цилиндра, площадь поверхности многогранника может сильно отличаться от площади боковой поверхности цилиндра. А это означает, что площадь поверхности многогранника не стремится к площади боковой поверхности цилиндра как к пределу.

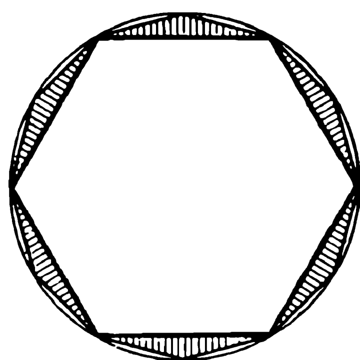


Рис. 100

Впишем в основание цилиндра правильный многоугольник (p-угольник) с большим числом сторон (на рис. 100 представлен многоугольник с 6 сторонами, так как при большем их числе рисунок стал бы неясным; читатель же должен представить себе, что многоугольник имеет очень большое число сторон). На каждой стороне многоугольника построим равнобедренный треугольник, вершина которого лежит на дуге, стягиваемой этой стороной. На рис. 100 все такие треугольники заштрихованы. Сравним их площади с площадью круга, лежащего в основании

цилиндра. Допустим, что площадь каждого заштрихованного треугольника в m раз меньше площади круга.

Число m, вообще говоря, не является целым; мы заменим его ближайшим к нему большим целым числом n. Если площадь круга равна S, то площадь каждого заштрихованного треугольника больше $\frac{S}{n}$.

Плоскостями, параллельными основанию цилиндра, находящимися на одинаковом расстоянии друг от друга, разделим цилиндр на n равных маленьких цилиндриков. Основаниями всех этих цилиндриков служат круги — сечения основного цилиндра параллельными плоскостями.

Впишем в основание каждого цилиндрика p-угольник так, чтобы его вершины лежали над серединами сторон p-угольника, расположенного в следующей, нижележащей плоскости, и под сторонами p-угольника, расположенного в ближайшей вышележащей плоскости. Натянем теперь треугольники так, чтобы одной стороной каждого треугольника служила сторона одного из p-угольников, а противолежащей вершиной — та вершина ближайшего выше или нижележащего p-угольника, которая находится над или под серединой этой стороны. Так образованные треугольники вместе составят многогранник, вписанный в боковую поверхность цилиндра (рис. 101).

Покажем теперь, что площадь каждой грани полученного многогранника больше $\frac{S}{n}$. Для этого

обратимся к рис. 102, на котором AB есть сторона одного из p-угольников, ADB и AFB — грани многогранника, вписанного в цилиндр, и ABC — заштрихованный треугольник, построенный в плоскости p-угольника тем же приемом, как и заштрихованные треугольники в плоскости основания цилиндра. Треугольники ABC и ABD имеют общее осно-

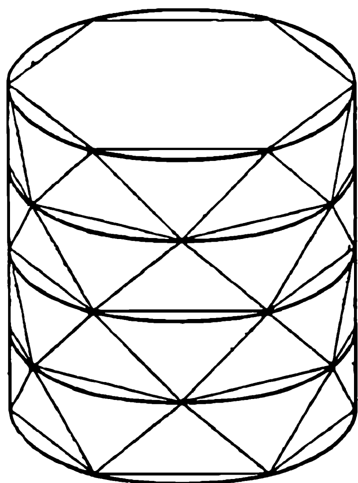


Рис. 101

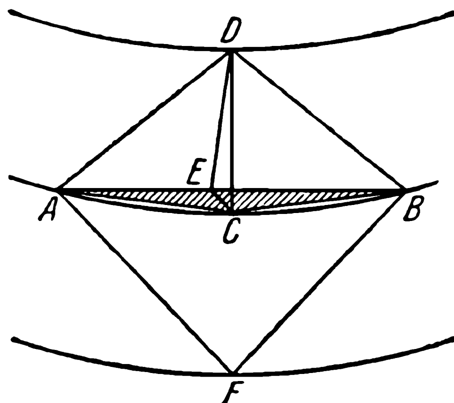


Рис. 102

вание AB, высота ED треугольника ABD больше высоты EC треугольника ABC, потому что ED — гипотенуза, а EC — катет прямоугольного треугольника EDC. Итак, треугольники ABD и ABC имеют равные основания, но так как высота первого из них больше высоты второго, то, следовательно, и площадь первого треугольника также больше второго. Но площадь треугольника ABC больше $\frac{S}{n}$. Поэтому площадь треугольника ABD тем более больше $\frac{S}{n}$. Итак, площадь каждой грани многогранника больше $\frac{S}{n}$.

Подсчитаем теперь общее число граней многогранника.

Мы имели n низеньких цилиндриков, из которых каждый заключал в себе $2p$ граней многогранника: p — граней, примыкающих к сторонам многоугольника, лежащего в плоскости нижнего основания цилиндрика, и p — граней, примыкающих к сторонам многоугольника, лежащего в плоскости верхнего основания цилиндрика. Следовательно, число всех граней многогранника, вписанного в цилиндр, равно $2pn$.

Подсчитаем теперь площадь поверхности многогранника.

Площадь каждой его грани больше $\frac{S}{n}$; число граней равно $2pn$. Следовательно, площадь поверхности мгогогранника больше $\frac{S}{n} \cdot 2pn$, т. е. больше $2pS$. В этот результат следует вдуматься.

Чтобы грани многогранника уменьшались, — а это необходимо для перехода к пределу, —нужно уменьшать стороны треугольников, служащих его гранями; следовательно, увеличивать число p. При этом p должно возрастать беспредельно. Но тогда и произведение $2pS$ должно тоже возрастать беспредельно, так что площадь поверхности многогранника по мере уменьшения его граней неограниченно увеличивается и, следовательно, не может приближаться ни к какому числу, т. е. не может стремиться ни к какому пределу. Таким образом в данном случае

площадь боковой поверхности цилиндра нельзя рассматривать как предел площади поверхности вписанного в цилиндр многогранника.

Постараемся теперь пояснить более наглядно, почему площадь поверхности многогранника беспредельно увеличивается, так как предыдущие рассуждения не обладают достаточной обозримостью. Заметим, что при увеличении p уменьшаются заштрихованные треугольники и, следовательно, увеличивается число n. Рассматриваемая нами поверхность имеет вид гармошки; при увеличении p и n складок у гармошки делается больше, но величина их уменьшается. Благодаря этому поверхность многогранника все плотнее прилегает к цилиндру; но при этом число складок так быстро увеличивается, что общая площадь поверхности все же очень быстро растет.

Чтобы можно было использовать принцип предельного перехода для определения площадей кривых поверхностей, нужно, следовательно, рассматривать такой многогранник, у которого не только уменьшаются постепенно размеры всех граней, благодаря чему он все ближе прилегает к кривой поверхности, но у которого при этом не образуется никаких складок. Это возможно в том случае, если вместо вписанного многогранника рассматривать описанный, гранями которого служат куски касательных плоскостей. У такого многогранника при уменьшении граней и увеличении их числа складки образоваться не могут. Ведь чем меньше грани описанного многогранника,

тем ближе отстоят друг от друга их точки касания с кривой поверхностью. Но при небольшом расстоянии кривизна поверхности мало отразится на направлении касательной плоскости; поэтому направление одной грани будет мало отличаться от направления смежной с ней грани.

Учитывая это замечание, перейдем к определению поверхности шара. Опишем около шара произвольный многогранник с очень малыми гранями. (Не следует думать, что он должен быть правильным. Он может быть каким угодно, лишь бы грани его были достаточно малы и касались поверхности шара). Натянем всевозможные треугольники, основаниями которых служат ребра многогранника, а противоположной вершиной — центр шара. Тогда многогранник разобьется на большое число пирамид, имеющих общую вершину в центре шара. Основаниями их будут служить грани описанного многогранника. Так как все касательные плоскости к шару находятся от центра на одинаковом расстоянии, равном радиусу шара, то высоты всех пирамид будут равны этому радиусу. Значит, объем каждой пирамиды равен произведению площади основания пирамиды на треть ее высоты, т. е. на треть радиуса. Чтобы найти объем многогранника, надо взять сумму объемов всех пирамид, т. е. произведение суммы их оснований на треть радиуса. Но сумма площадей оснований пирамид есть площадь поверхности многогранника. Следовательно, объем описанного многогранника равен произведению площади его поверхности на

треть радиуса шара. Формулой это можно выразить так:

$$V_1 = S_1 \cdot \frac{R}{3}.$$

Здесь V_1 — объем многогранника, S_1 — площадь его поверхности, R — радиус шара.

Будем теперь увеличивать число граней многогранника, уменьшая самые грани. Поскольку мы рассматриваем только описанные многогранники, полученная формула будет верна для всех этих многогранников. Переходим теперь к пределам. Так как V_1 стремится к объему шара V, S_1 — к площади его поверхности S, а R остается неизменным, то и для V и S будет справедливо то же соотношение

$$V = S \cdot \frac{R}{3}$$

или

$$V = \frac{1}{3} RS. \qquad (1)$$

Эта формула показывает, что, зная площадь поверхности шара S и его радиус R, можно сразу же получить объем шара V. Но формулу можно преобразовать так:

$$S = \frac{3V}{R}, \qquad (2)$$

тогда она будет показывать, что, зная объем шара и его радиус, можно сейчас же получить площадь его поверхности, для чего нужно лишь разделить тройной объем шара на радиус.

К сожалению, обычно бывает известен только радиус шара. Поэтому нам необходимо научиться

находить объем шара или площадь поверхности шара, зная лишь его радиус. При этом нам достаточно получить формулу для определения только объема или только площади поверхности шара; потом, с помощью соотношения (1) или (2) мы преобразуем эту формулу так, чтобы получить формулу для нахождения второй величины.

Мы предпочитаем начать с вывода формулы для объема шара, но прежде рассмотрим объемы цилиндра и конуса.

Представим себе, что около цилиндра описана правильная призма; объем ее равен произведению площади основания на высоту. Будем теперь увеличивать число сторон многоугольника, лежащего в основании. Тогда объем призмы будет увеличиваться и стремиться как к пределу к объему цилиндра; многоугольник, лежащий в основании призмы, тоже будет изменяться, причем площадь основания будет стремиться как к пределу к площади круга, служащего основанием цилиндра. Поскольку при всех этих изменениях объем призмы будет всегда равен произведению площади основания на высоту, то же самое будет верно и для пределов: объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.

Совершенно аналогично можно получить правило для вычисления объема конуса. Опишем около основания конуса правильный многоугольник и рассмотрим пирамиду, вершина которой совпадает с вершиной конуса и основанием которой служит этот

многоугольник. Объем пирамиды будет равен одной трети произведения площади ее основания на высоту. Это соотношение сохраняется и при увеличении числа сторон многоугольника, лежащего в основании

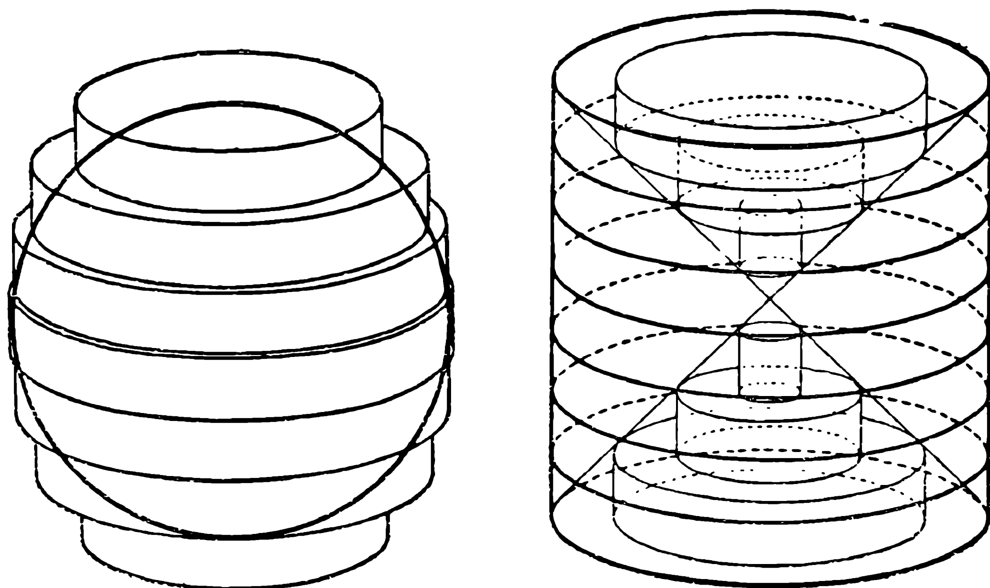


Рис. 103

пирамиды. Переходя к пределам мы убедимся, что объем конуса равен одной трети площади основания на высоту.

Что касается объема шара, то его удобнее рассматривать не как предел, к которому стремится объем некоторого многогранника при уменьшении площади его граней и увеличении числа их, а как предел объемов некоторых тел, составленных из цилиндров.

Проведем в шаре один диаметр и пересечем шар несколькими плоскостями, перпендикулярными

к этому диаметру, отстоящими на одинаковом расстоянии друг от друга (рис. 103). Тогда шар распадется на несколько слоев, из которых каждый будет ограничен двумя его круговыми сечениями и боковой поверхностью — шаровым поясом. Заключим каждый слой внутрь цилиндра, одним из оснований которого служит большее основание шарового слоя; другое основание цилиндра поместим в плоскости меньшего основания этого слоя. Тогда шар, как показано на рис. 103, окажется лежащим внутри тела, составленного из цилиндров одинаковой высоты.

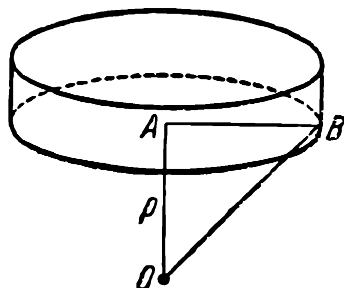


Рис. 104

Найдем объем одного из этих цилиндров (рис. 104). Для определенности предположим, что большее основание цилиндра находится на расстоянии p от центра шара и высота цилиндра равна h. Тогда, зная радиус шара, по теореме Пифагора найдем из треугольника OAB квадрат радиуса цилиндра:

$$r^2 = AB^2 = R^2 - p^2.$$

Умножив эту величину на π, получим площадь основания цилиндра:

$$S = \pi r^2 = \pi (R^2 - p^2).$$

Умножив площадь основания цилиндра на h, получим объем цилиндра:

$$v = Sh = \pi (R^2 - p^2)h.$$

Сравним теперь шар с телом, образуемым следующим образом: возьмем цилиндр, высота которого равна диаметру шара, а основание — наибольшему сечению шара. «Высверлим» из этого цилиндра два конуса, общая вершина которых лежит на середине оси цилиндра и основаниями которых служат основания цилиндра. Оставшаяся после этого «высверливания» часть цилиндра и есть то тело, с которым мы будем сравнивать шар.

Представим себе, что это тело поставлено рядом с шаром (рис. 103) таким образом, что ось его перпендикулярна к плоскостям, пересекающим шар, и что само оно находится на одном уровне с шаром. Тогда плоскости, разделившие шар на слои, разобьют наше тело на кольца. Заключим каждое кольцо в кольцо с цилиндрическими стенками, основанием которого служит наибольшее из кольцевых оснований, и определим объем такого цилиндрического кольца.

Рассмотрим то цилиндрическое кольцо, наибольшее основание которого находится на расстоянии p от центра шара, т. е. кольцо, лежащее на одном уровне с рассмотренным ранее шаровым слоем (рис. 105). Его можно рассматривать как разность объемов двух круговых цилиндров, одного с радиусом основания AB и другого с радиусом основания AC и общей высотой, равной толщине слоя. Квадрат радиусов мы найдем из прямоугольных треугольников OAB и OAC:

$$r_1^2 = R^2,$$
$$r_2^2 = AC^2 = p^2,$$

потому, что угол $AOC = 45^\circ$ и, следовательно, прямоугольный треугольник OAC — равнобедренный.

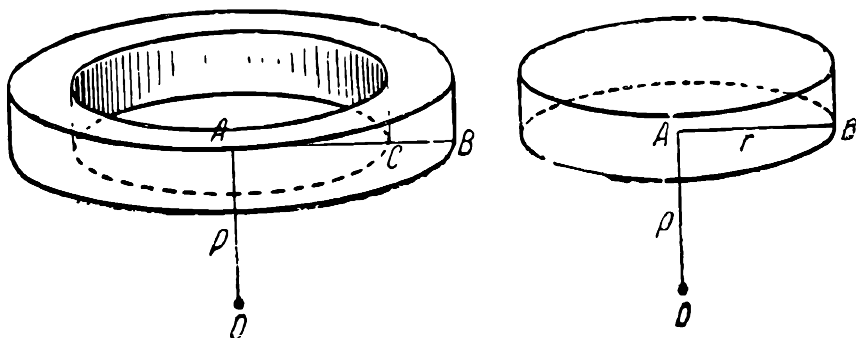


Рис. 105

Площади оснований этих цилиндров будут равны соответственно:

$$S_1 = \pi R^2,$$
$$S_2 = \pi \rho^2.$$

Объемы их:

$$V_1 = \pi R^2 h,$$
$$V_2 = \pi \rho^2 h.$$

Разность этих объемов даст нам объем цилиндрического кольца:

$$V = V_1 - V_2 = \pi R^2 h - \pi \rho^2 h = \pi (R^2 - \rho^2) h.$$

Сравнивая это выражение с полученным для объема шарового слоя, мы убеждаемся, что они равны. Значит, тело, внутри которого заключен шар, и тело, внутри которого заключен цилиндр с высверленными конусами, состоят из частей одинакового объема и, следовательно, сами имеют равные объемы.

Совершим теперь предельный переход. Будем увеличивать число секущих плоскостей, уменьшая расстояние h между ними. Тогда объем тела, составленного из цилиндров, будет стремиться к объему шара, а объем тела, составленного из цилиндрических колец, — к объему цилиндра с высверленными конусами. Так как объемы этих двух тел все время остаются равными, то, стало быть, и пределы, к которым они стремятся, равны; иначе говоря, объем шара равен объему цилиндра с высверленными конусами.

Таким образом, вместо того, чтобы вычислять объем шара, мы можем вычислить объем цилиндра с двумя высверленными конусами.

Объем цилиндра до высверления конусов равен:

$$V_1 = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3,$$

потому что радиус шара R есть в то же время радиус цилиндра, высота которого равна диаметру шара $2R$.

Каждый из высверленных конусов имеет радиус основания R и высоту R; поэтому объем каждого из них равен

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{1}{3}\pi R^3.$$

Два конуса вместе будут иметь объем $\frac{2}{3} \cdot \pi R^3$.

Вычтя эту величину из объема цилиндра, получим объем цилиндра с двумя высверленными конусами или, что все равно, объем шара:

$$V_{\text{шара}} = V_1 - V_2 = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Обычно по этой формуле и вычисляется объем шара.

Теперь мы можем получить формулу для определения площади поверхности шара, воспользовавшись выведенным ранее соотношением (2). Как мы видели, чтобы определить площадь поверхности шара, надо его объем умножить на 3 (получим $4\pi R^3$) и полученную величину разделить на R. Таким образом площадь поверхности шара определяется по формуле

$$S_{\text{шара}} = 4\pi R^2$$

(здесь S — площадь поверхности шара и R — радиус шара).

Что касается объемов и поверхностей других более сложных тел, то для отыскания их можно пользоваться теми же приемами: объем тела, ограниченного кривой поверхностью, рассматривается как предел, к которому стремится объем многогранника, вписанного в поверхность, ограничивающую тело, или как объем многогранника, описанного около этой поверхности. Площадь кривой поверхности определяется как предел площади поверхности многогранника, описанного около этой поверхности (мы уже знаем, что в этом случае нельзя брать вписанные). При этом пределы берутся при условии, что грани вписанного или описанного многогранника неограниченно уменьшаются, а число их увеличивается.

Вычисление объемов и площадей кривых поверхностей представляет очень трудную задачу. Эти вопросы специально рассматриваются в интегральном исчи-

слении; в этом отделе высшей математики предельные переходы, которые приходится при этом совершать, рассматриваются систематически.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задачи к первой главе

1) Площадь правильного шестиугольника равна произведению половины его периметра на апофему (периметром многоугольника называется сумма его сторон; апофемой правильного многоугольника — расстояние от его центра до его сторон; при решении задач следует иметь в виду, что *AD* равно двум сторонам шестиугольника (рис. 106).

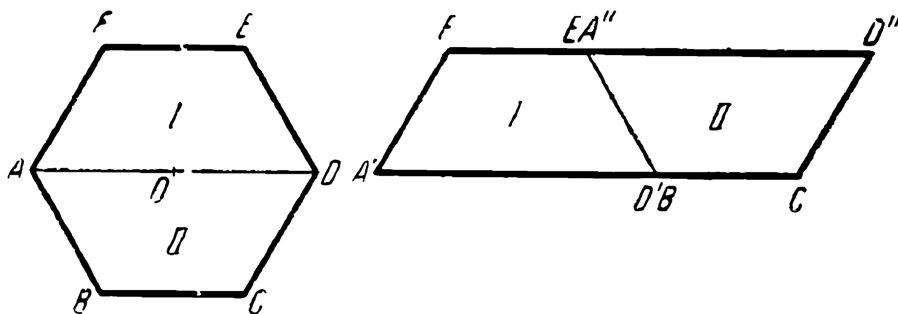


Рис. 106

2)

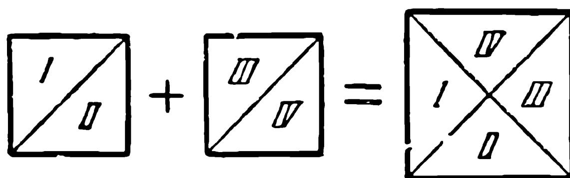


Рис. 107

3)

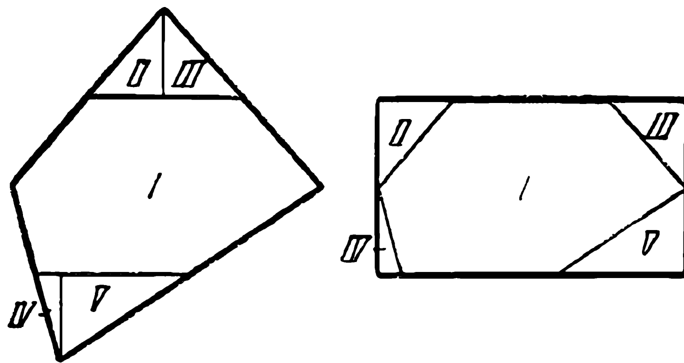


Рис. 108

4)

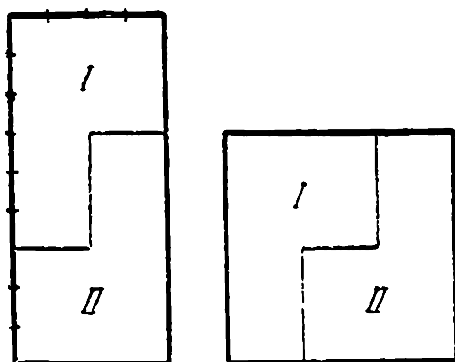


Рис. 109

5) На пять. Можно указать много способов для разрезания семиугольника на пять треугольников. На рисунке 110 дан один из них.

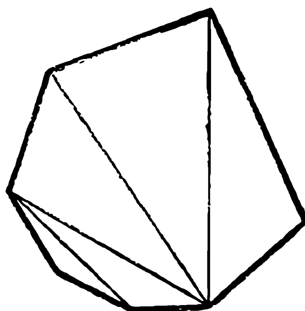


Рис. 110

б) Площадь правильного многоугольника равна произведению половины его периметра на апофему (рис. 111).

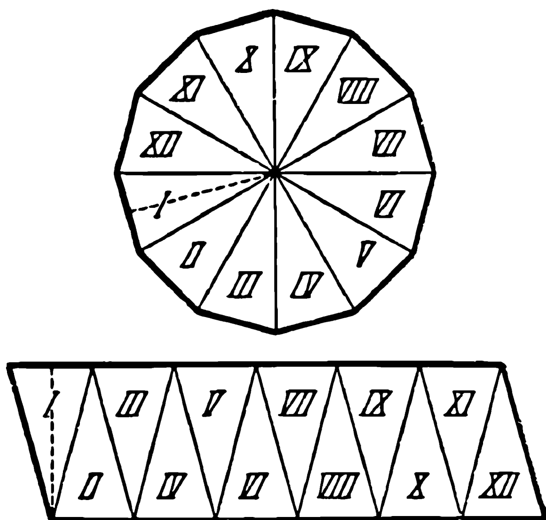


Рис. 111

Задачи ко второй главе

1) Четыре правильных пятиугольника. Они изображены на прилагаемых рисунках (рис. 112).

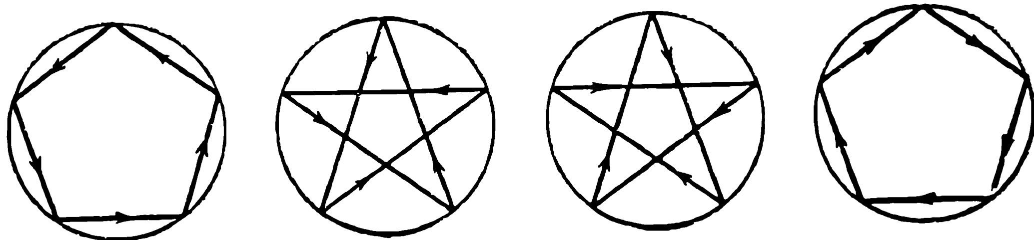


Рис. 112

2) При продолжении сторон обыкновенного правильного пятиугольника до их взаимного пересечения получается звездчатый правильный пятиугольник (рис. 113).

3) Можно; вершинами звездчатого восьмиугольника будут точки пересечения сторон *AB* и *DE*, *BC* и *EF*, *CD* и *FG*, *DE* и *GH*, *EF* и *HA*, *FG* и *AB*, *GH* и *BC*, *HA* и *CD* (рис. 114).

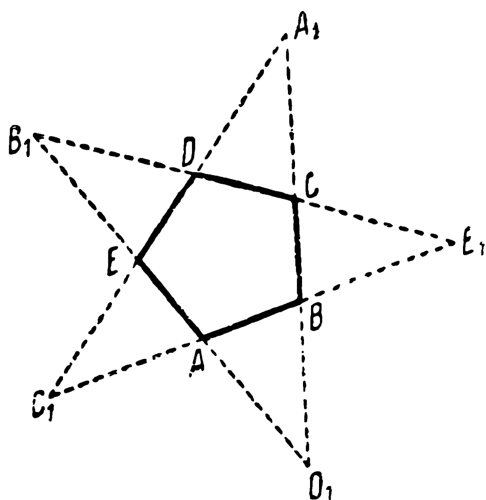


Рис. 113

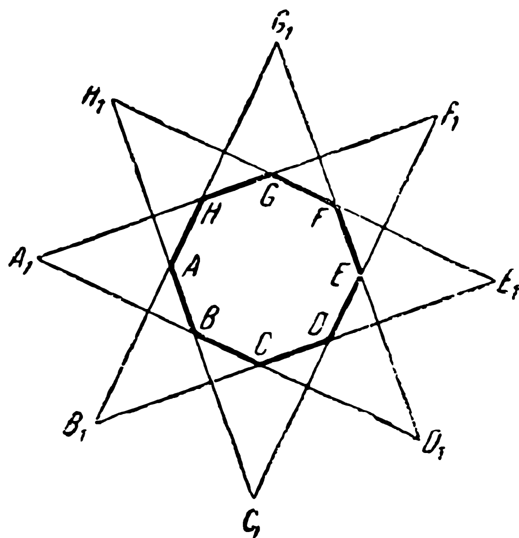


Рис. 114

4) Вершины правильного шестиугольника должны делить окружность на шесть равных частей. Если точки деления соединить последовательно, то получим обыкновенный правильный шестиугольник; если же соединим их через одну, то полу-

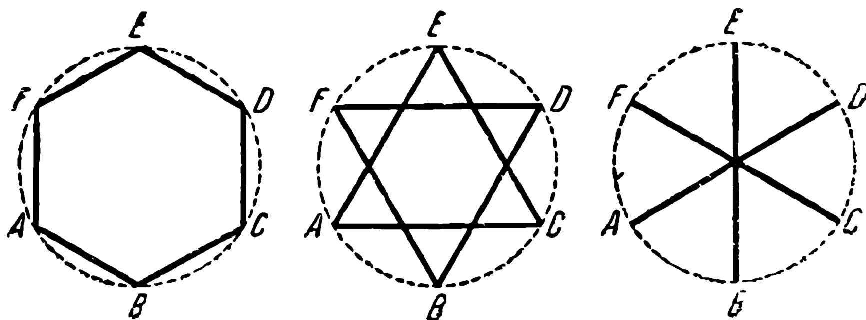


Рис. 115

чим два правильных треугольника; наконец, если соединим их через две, то получим три отрезка. Таким образом, правильного звездчатого шестиугольника не существует (рис. 115).

5) Пусть *O* — точка пересечения непараллельных сторон антипараллелограма *ABCD*, площадь которого равна сумме

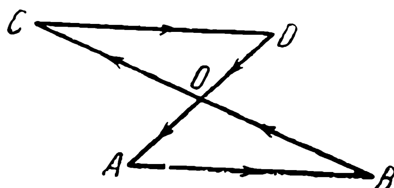


Рис. 116

площадей треугольников *ABO* и *OCD* (рис. 116). Площади последних равны, но противоположны по знаку. Следовательно, их сумма равна нулю.

6) + 2 см^2.

7) а) $(+100)+(-25)=75$ см^2

б) $(+100)+(+75)=125$ см^2

в) В обоих случаях не зависит от положения квадратов.

Задачи к третьей главе

1) $\pi=16\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3\right]-4\cdot\frac{1}{239}\approx3.14$

Технический редактор *А. А. Базанова* Корректор *Л. Г. Афанасьева*

Сдано в набор 4/V 1937. Подписано к печати 16/XI 1937 г. Формат $70\times108^{1}/_{32}$. Объем $4^{1}/_{4}$ п. л. и 4 вкл. В печ. л. 44.000 зн. 5,23 уч. авт. л. Тираж 10.225 экз. Уполн. Главлита № Б-31342. Рисо № 582. АНИ № 493. Заказ № 1359.

1-я Образцовая типография Огиза РСФСР треста „Полиграфкнига".
Москва, Валовая, 28.